

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física Gleb Wataghin
Disciplina F 609 – Tópicos de Ensino de Física I
Coordenador: Prof. José Joaquín Lunazzi

**Queda em curvas de menor tempo e tempo
independente da altura - Braquistócrona e Tautócrona**



Aluno: Wellington de Lima Caetano
e-mail: well_unicamp@yahoo.com.br

RA 047000

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Firer
e-mail: mfirer@ime.unicamp.br

Campinas, 07 de junho de 2008.

Resumo

Neste trabalho, construindo duas pistas em madeira, mostramos como a cicloide invertida apresenta as propriedades de ser uma curva tautócrona e também braquistócrona. Na tautócrona, o tempo independe da altura em que o corpo foi lançado e na braquistócrona o tempo de queda é o menor possível.

A primeira destas curvas permite verificar que a cicloide invertida é tautócrona, pois soltando duas bolinhas de alturas diferentes, uma de cada lado dos dois lados distintos do ponto mínimo, estas colidem exatamente no ponto mínimo, mostrando que o tempo, neste caso, é independente da altura inicial.

A segunda curva tem uma metade de uma cicloide e outra metade em outro formato se encontrando no ponto de mínimo. Nesta curva, mostramos que duas bolinhas soltas da mesma altura sempre se colidem na segunda metade, comprovando que o primeiro trecho é uma braquistócrona, pois o tempo de descida é o menor possível para o trajeto que liga dois pontos quaisquer a mesma altura.

Os resultados teóricos que demonstram estas propriedades são obtidos a partir do cálculo diferencial e integral, mais especificamente, usando técnicas variacionais para estudar uma equação diferencial ordinária. Ainda mostramos que a propriedade de ser uma braquistócrona pode ser deduzida através do “Princípio de Fermat” e da Lei de Snell para refração, para tanto usaremos o Princípio de Hamilton.

Também fazemos uma seção com generalidades do cálculo diferencial e integral para mostrar para alunos de ensino médio.

Um vídeo mostrando o resultado obtido com a pista tautócrona foi adicionado ao site “YouTube” e pode ser acessado pelo endereço abaixo:

http://www.youtube.com/watch?v=rE_LK_XHXZY

Palavras chave: cicloide, tautócrona e braquistócrona

Sumário

1. Introdução	20.3
2. Construção da tautócrona	20.6
3. Construção da braquistócrona	20.8
4. Breve contextualização ao cálculo diferencial e integral	20.10
5. Cálculo variacional e o Princípio de Hamilton	20.15
6. Dedução das equações da cicloide, tautócrona e braquistócrona	20.19
7. Conclusões	20.28
8. Referências	20.28
9. Comentários	20.29
10. Agradecimentos	20.29
11. Anexos	20.30

1. Introdução

Quando se pergunta a uma pessoa o que acontece quando duas bolinhas são soltas de alturas diferentes em uma pista simétrica (será o caso deste experimento) a resposta mais intuitiva que se espera (como a de uma criança) é que a bolinha solta de uma menor altura atinja o ponto de mínimo mais rapidamente. Outra curiosidade ocorre se perguntarmos qual a trajetória mais rápida para ir de um ponto para outro no plano. A resposta mais intuitiva que se espera é que a trajetória deve ser uma reta.

Neste trabalho, vamos obter teoricamente e depois experimentalmente as respostas as perguntas feitas acima e os resultados são surpreendentes. No primeiro caso, a surpresa é o fato das duas bolinhas colidirem exatamente no ponto mais baixo da curva, isto é, na tautócrona as duas bolinhas percorrem os diferentes caminhos no mesmo tempo! No segundo caso, embora a reta seja a curva que minimize a distância entre dois pontos no plano, o resultado para o menor tempo é uma braquistócrona, que como veremos, também é uma cicloide invertida.

O nome “tautócrona” também vem do grego *tautos* (mesmo) e *chronos* (tempo) e, agora, neste caso, falamos da curva que faz com que um corpo em condições ideais (sujeito apenas a ação da gravidade e restrito ao percurso da curva) atinja o ponto baixo da curva após um intervalo de tempo que independa da altura em que foi solto.

O nome “braquistócrona” vem do grego *brakhisto* (rápido) e *chronos* (tempo), logo falamos da curva que permite a um corpo em condições ideais (sujeito apenas a ação da gravidade e restrito ao percurso da curva) realizar um mesmo percurso unindo dois pontos dados em menor tempo (não em distância).

A cicloide é o *locus* (lugar geométrico) descrito por um ponto na borda de um disco rolando ao longo de uma linha reta. A cicloide foi estudada e chamada como tal

por Galileu em 1599, que tentou encontrar a área usando pedaços de metal cortados na forma da cicloide. Torricelli, Fermat e Descartes encontrarão formalmente a área. A cicloide também foi estudada por Roberval em 1634, Wren em 1658, Huygens em 1673 e Johann Bernoulli em 1696. Roberval e Wren encontraram o comprimento do arco.

O problema da tautócrona foi solucionado por Christiaan Huygens em 1659. Ele provou geometricamente em seu “*Horologium oscillatorum*” que a curva (tautócrona) era uma cicloide. Esta solução foi depois usada para resolver o problema da curva braquistócrona. Jakob Bernoulli solucionou o problema usando cálculo em um trabalho onde se usou o termo *integral* pela primeira vez.

Depois outros matemáticos como Joseph Louis Lagrange e Leonard Euler procuraram uma solução analítica do problema.

Para entender a demonstração das equações que descrevem tautócrona e a braquistócrona devemos ver como se constrói geometricamente uma cicloide e também como se obtém as equações que a caracterizam,

A ferramenta matemática utilizada solucionar os dois problemas e para a demonstração das equações é o chamado cálculo diferencial e integral. Faremos uma breve introdução e referências históricas ao Cálculo e também um pouco de aplicações.

2. Construção da tautócrona

Esta pista foi construída usando 03 (três) chapas de madeira do tipo compensado de 50 cm x 50 cm x 6mm coladas, uma a outra com cola de madeira, de forma a obter uma peça de 18 mm de espessura (diâmetro aproximado da bolinha de gude).

O corte no formato da curva tautócrona foi feito usando uma serra elétrica tico-tico, pois este tipo de serra permite fazer curvas enquanto se corta a madeira.

Para garantir que a restrição de que o corpo (bolinha de gude) esteja limitado ao movimento sobre a superfície (sem perder o contato com a rampa) acrescentamos aos dois lados da rampa folhas de transparência, pois esta, pela sua maior rigidez, não permite que a bolinha caia do trilho ao final de cada demonstração ao mesmo tempo que permite visualizar o fenômeno.

Uma foto da montagem é mostrada na figura 1 abaixo:



Figura 1 Foto da pista tautócrona

O resultado obtido, como esperado, foi que o tempo que bolinhas lançadas de alturas diferentes (uma de cada lado da pista) atingem o ponto de mínimo ao mesmo tempo, chocando-se uma a outra, confirmando que a cicloide invertida é uma curva tautócrona e, portanto, o tempo de queda nessa curva independe do ponto de lançamento, que confirma a expectativa. Uma dificuldade encontrada foi em como manter a bolinha no trilho sem cair após cada descida pela rampa, mas este problema foi resolvido com a transparência, como descrito acima.

Um fato interessante a se pensar ocorre se colocarmos uma das bolinhas exatamente no ponto mínimo (ela já teria chegado!), a outra bolinha precisaria viajar em tempo zero para chegar, com velocidade infinita. Mas este paradoxo deve ser respondido pensando que temos singularidade¹ nas equações no ponto de mínimo (estável), isto é, nosso problema é válido para bolinhas com posição inicial diferente de zero.

Um vídeo mostrando o resultado obtido com a pista tautócrona foi adicionado ao site “You Tube” e pode ser acessado pelo endereço abaixo:

http://www.youtube.com/watch?v=rE_LK_XHXZY

¹ Singularidade: em matemática, diz-se que é ponto onde uma função matemática assume valores infinitos ou, de certa maneira, tem um comportamento não definido

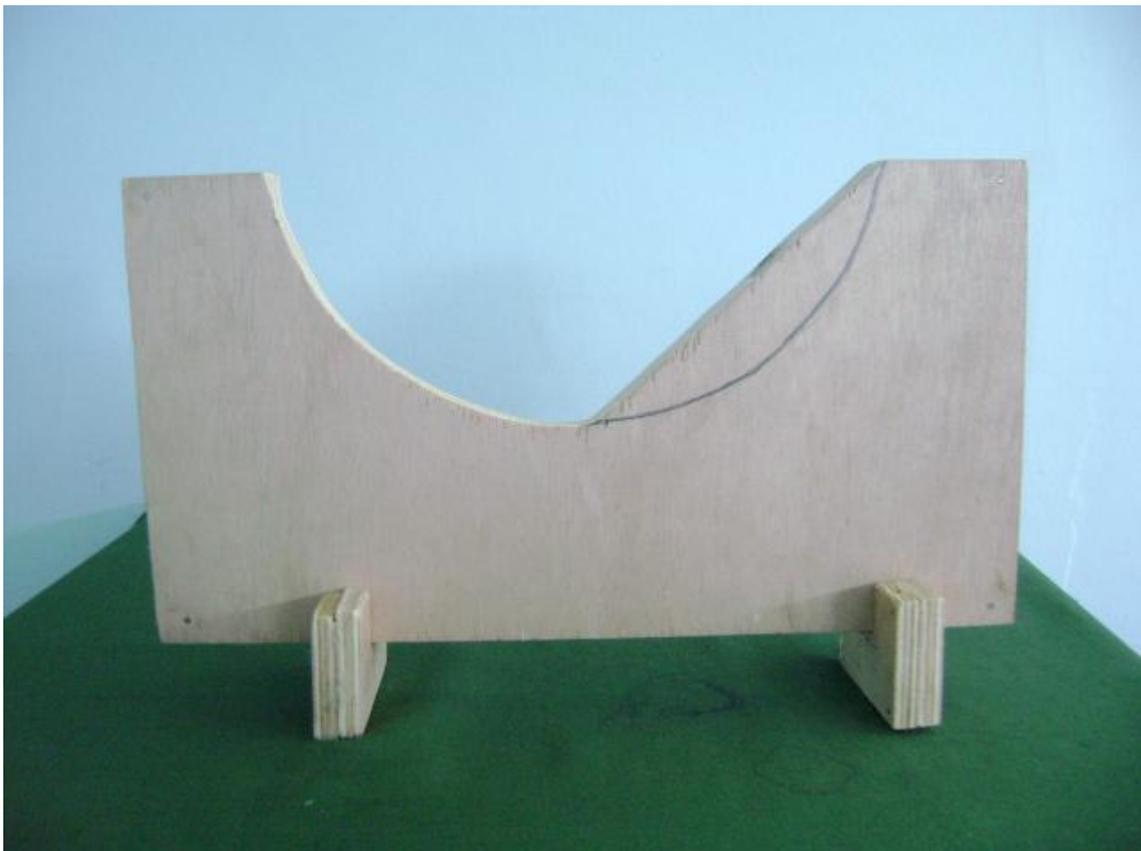
3. Construção da braquistócrona

Construímos duas pistas braquistócrona, cada uma usando 02 (duas) chapas de madeira do tipo compensado de 50 cm x 50 cm x 10mm coladas.

A primeira pista um lado em formato de ciclóide invertida e o outro em formato de reta, de modo a comparar os resultados (tempo de queda) nas duas partes da pista.

A segunda pista possui a primeira metade em madeira e tem formato de ciclóide invertida e a outra metade feita de um material plástico maleável que permite tomar a forma desejada.

A figura 2 mostra as duas pistas braquistócrona construídas:



(a)



(b)

Figura 2 Foto da pista braquistócrona (a) com metade em pista reta (b) com metade em pista maleável

Para a primeira pista, o resultado obtido, foi que para duas bolinhas lançadas (de uma mesma altura) simultaneamente nas diferentes pistas, temos que a bolinha lançada na cicloide sempre atinge o mínimo primeiro, confirmando que a cicloide invertida é uma curva braquistócrona e, portanto, o tempo de queda nessa curva é sempre o menor possível, que confirma a expectativa. Para manter a bolinha no trilho sem cair após cada descida pela rampa, foi resolvido com a transparência, como também foi feito na tautócrona.

Na segunda pista, o resultado obtido, como esperado, foi que bolinhas lançadas simultaneamente nas diferentes pistas sempre se colidem na parte modelável da curva, novamente confirmando que a cicloide invertida é uma curva braquistócrona. Também usamos transparência para manter a bolinha no trilho sem cair após cada descida pela rampa.

4. Breve contextualização ao cálculo diferencial e integral²

Obter as respostas teóricas sobre a forma das curvas envolve o formalismo matemático do cálculo e das equações diferenciais. Para entender o conceito destas ferramentas matemáticas e depois aplicar seu resultado devemos fazer uma contextualização sobre a descoberta/invenção do cálculo.

O Cálculo Diferencial e Integral, também chamado de cálculo infinitesimal, ou simplesmente Cálculo é uma área fundamental da matemática moderna, que se dedica ao estudo de grandezas com certas taxas de variação (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido) mas que não necessariamente constantes. Quando há variações, no movimento ou crescimento (como velocidades e forças variáveis) o cálculo é a matemática a ser empregada.

Desenvolvido por Isaac Newton e Gottfried Leibniz, em trabalhos independentes, o cálculo é a ferramenta usada em várias áreas desde a matemática, química, e física. O estudo de cálculo assume um certo pressuposto conhecimento em certas áreas da matemática, como funções, geometria e trigonometria, pois são as bases do cálculo. O cálculo tem inicialmente três operações básicas, isto é, operações fundamentais a todas outras são delas decorrentes: o cálculo de limite, o cálculo de derivadas e a integral de funções.

² Esta contextualização deve ser feita em uma aula de ensino médio, mas pode ser suprimida em um curso universitário.

-Limite

O conceito de limite é usado para descrever o comportamento de uma função à medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor, assim como o comportamento de uma seqüência de números reais, à medida que o índice (da seqüência) vai crescendo, aumentando (usa-se dizer tendendo) para infinito. Os limites são usados no cálculo diferencial e em outros ramos da análise matemática para definir derivadas e a continuidade de funções.

-Derivada

O cálculo diferencial é o estudo da definição, propriedade e aplicações da derivada ou deslocamento de um gráfico. O processo de encontrar a derivada é chamado "diferenciação", a taxa de variação de uma função. Formalmente, diz-se que uma função f é derivável (ou diferenciável) se, próximo de cada ponto a do seu domínio, a função $f(x) - f(a)$ se comportar aproximadamente como uma função linear, ou seja, se o seu gráfico for aproximadamente uma reta. A inclinação de uma tal reta é a derivada da função f no ponto a e representa-se por:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = y'(x) \quad (4.1)$$

A derivada pode ser obtida através do limite, para tanto o limite abaixo deve existir:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (4.2)$$

A derivada pode ser interpretada de duas maneiras: geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função e de maneira trigonométrica como a tangente da reta (a derivada) faz com o eixo horizontal, como mostra a figura 3 abaixo:

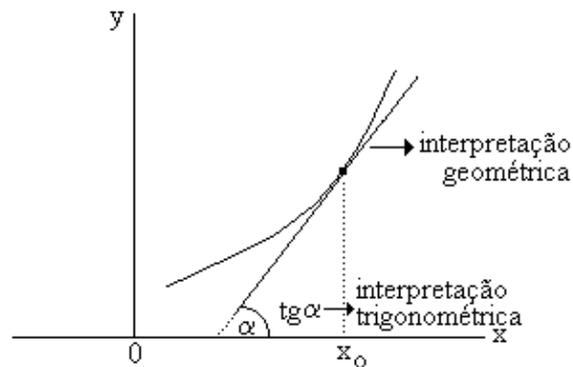


Figura3 Interpretações da derivada

-Integral

A integral de uma função foi criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano (como fazemos com triângulos, trapézio etc., mas agora não necessariamente a curva é uma reta, com nos casos citados) e também surge naturalmente em outros problemas de Física, como na determinação do deslocamento, se for conhecida a sua velocidade instantânea (a função que dá a velocidade) ao longo do percurso. O processo de se calcular a integral de uma função é chamado de integração.

Diferentemente da noção de derivada, existem várias técnicas para a integração, todas elas visando a resolver problemas relacionados a limites, continuidade e existência de certos processos utilizados na definição. No entanto todas estas definições dão a mesma resposta para o resultado final de uma integração.

A integral também é conhecida como anti-derivada, pois é a operação inversa a derivada. Uma definição também conhecida para integral indefinida (a que não tem intervalo de integração definido) é:

$$\int f(x)dx = F(x) \quad (4.3)$$

se e somente se

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (4.4)$$

A figura 4 mostra uma integral abaixo da curva $f(x)$, que poderia ser por exemplo a velocidade de um móvel, neste caso, a integral abaixo é igual ao deslocamento do corpo entre a e b :

$$\Delta s = \int_a^b f(x)dx \quad (4.5)$$

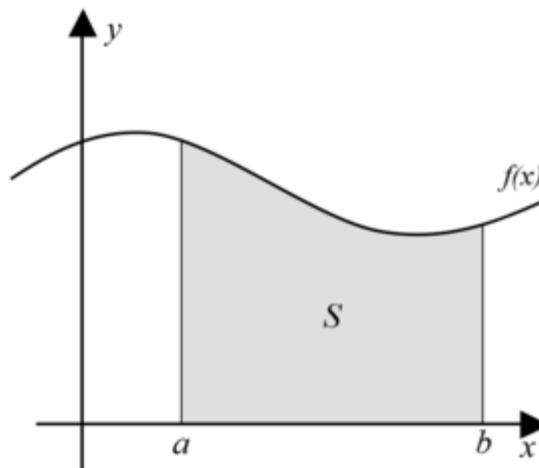


Figura 4 Gráfico de uma integral S de uma função $f(x)$.

Os conceitos de cálculo foram desenvolvidos por Isaac Newton durante sua estada em casa, quando uma epidemia de peste fechou a Universidade no verão de 1665,

ele lançou a base do cálculo diferencial e integral anos antes de sua descoberta independente por Leibniz (Gottfried Wilhelm Von Leibniz, 1646-1716). O "método dos fluxions", como ele o chamava, estava baseado na descoberta crucial de que a integração de uma função é meramente o procedimento inverso da diferenciação. Seu livro *De Methodis Serierum et Fluxionum* foi escrito em 1671, mas só foi publicado quando John Colson o traduziu para o inglês em 1736.

5. Cálculo variacional e o Princípio de Hamilton³

O problema básico do cálculo variacional é determinar uma função $y(x)$ tal que a integral:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x), x\} dx \quad (5.1)$$

seja um extremo (máximo ou mínimo), para x_1 e x_2 fixos [1].

Se considerarmos que $y(x)$ fornece o valor mínimo para a integral J , qualquer função vizinha de y , por mais perto que possa ser, fornecerá um valor maior para J . Para obter a função vizinha de y podemos usar a seguinte definição:

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x) \quad (5.2)$$

onde $\alpha\eta(x)$ é a curva de um caminho alternativo a $y(x)$ em que temos para $\alpha = 0$, $y(0, x) = y(x)$, e de modo que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ de modo que $y(\alpha, x_1) = y(x_1)$ e $y(\alpha, x_2) = y(x_2)$. Podemos esquematizar o descrito acima no seguinte gráfico (figura 5).

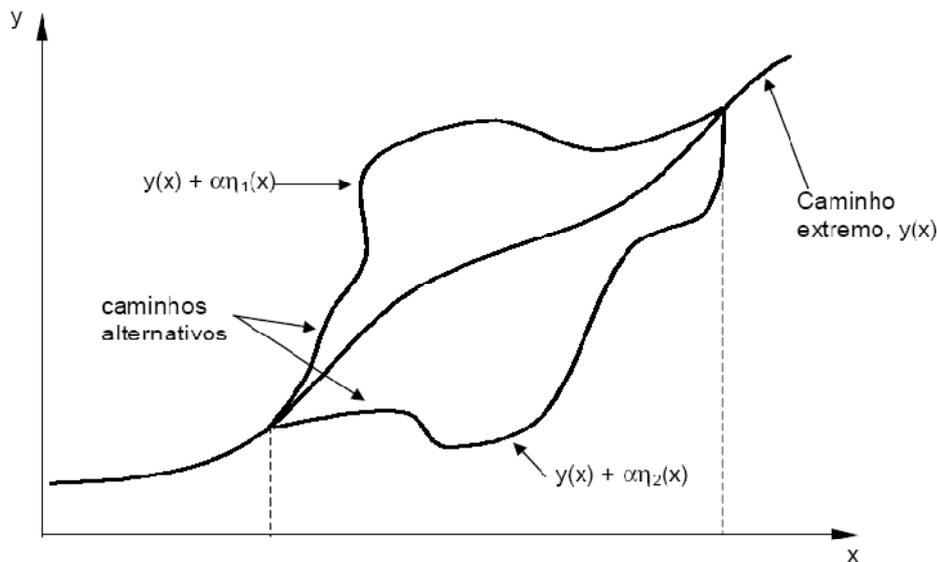


Figura 5 Gráfico de uma função ligando dois pontos e dois de seus caminhos alternativos.

² Esta demonstração pode ser suprimida em aula no nível médio.

Usando $y(\alpha, x)$, ao invés de usarmos a função $y(x)$, na equação (3.1), J então será função de α , de modo que:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha, x), x\} dx \quad (5.3)$$

A condição de um resultado extremo é que:

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (5.4)$$

para qualquer função $\eta(x)$.

Para determinar o resultado da condição expressa por (5.4), vamos fazer a diferenciação de (5.3):

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx \quad (5.5)$$

Como consideramos os extremos de integração constantes, a diferenciação afeta somente o integrando.

Assim podemos “passar para dentro” a derivada parcial de modo que teremos

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial J}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \quad (5.6)$$

pois somente y e y' (derivada de y em relação a x) que dependem de α . Mas de (5.2) temos que:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \quad (5.7)$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dx}$$

mas como

$$\frac{d\alpha}{dx} = 0$$

Pois α não depende de x .

Temos que

$$y'(\alpha, x) = \frac{\partial y}{\partial x} = y'(x) + \alpha \frac{d\eta}{dx}(x)$$

finalmente

$$\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d}{dx} \eta(x) \quad (5.8)$$

Substituindo (5.7) e (5.8) em (5.6) temos:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f'}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx \quad (5.9)$$

Podemos integrar por partes o segundo termo do integrando, que lembrando a expressão geral é:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (5.10)$$

onde identificando os termos:

$$u = \frac{\partial f}{\partial y'} \quad e$$

$$dv = \frac{d\eta}{dx} dx = d\eta$$

Assim temos que $v = \eta$ e que:

$$du = \frac{du}{dx} dx = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dy'} \right) dx$$

Substituindo em (5.9) temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial f'}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx$$

(5.11)

Com isso a equação (5.9) pode ser escrita como:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dy'} \right) \eta(x) \right] dx$$

colocando o termo em evidência:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{df}{dy'} \right) \eta(x) dx \quad (5.12)$$

O integrando da equação (5.12) tem que ser zero (para satisfazer (5.4)) para $\alpha = 0$ qualquer que seja $\eta(x)$. Isto só acontece impondo esta condição, o que nos estabelece:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{df}{dy'} = 0 \quad (5.13)$$

Devemos lembrar que quando $a = 0$, y e y' do integrando ficam $y(a,x) = y(x)$ e $y'(a,x) = y'(x)$, ou seja, f deve ser diferenciada em função de $y(x)$ e $y'(x)$. Este resultado é conhecido como Equação de Euler³ e será usado na seção seguinte para mostrar que a cicloide invertida é uma braquistócrona.

³ Demonstração feita pela primeira vez por Leonard Euler em 1744.

6. Dedução das equações da cicloide, tautócrona e braquistócrona

Vamos usar o formalismo matemático descrito anteriormente para obter as equações para as curvas interessadas:

- Cicloide

A trajetória que um ponto da borda de um disco que rola, sem deslizar, por uma linha reta é uma cicloide, que é a curva que dá a solução aos problemas da tautócrona e da braquistócrona. Vamos fixar a reta como sendo o eixo x (linha horizontal) e denotar por θ o ângulo formado pela semi-reta vertical que passa pelo centro O e pelo ponto de tangência da circunferência com o eixo x e o segmento que une o ponto P na borda do disco com O . Para um ângulo θ (em relação ao eixo horizontal) genérico temos a figura abaixo, onde colocamos raio $R = a$ para a circunferência geradora

A figura 6 mostra a construção de uma cicloide.

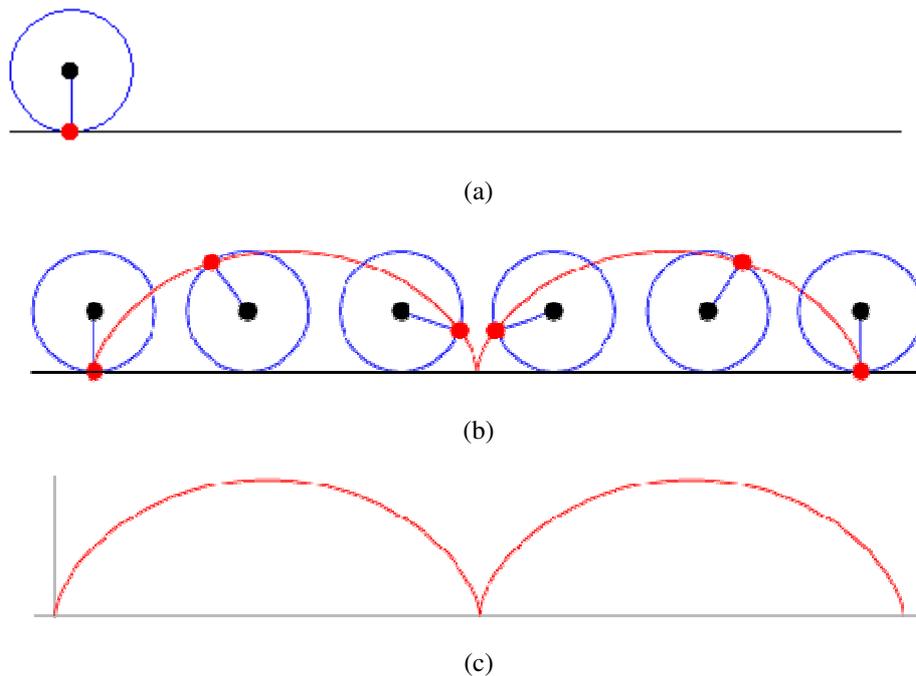


Figura 6 (a) um disco rolando por uma trajetória reta; (b) a trajetória de um ponto na borda do disco;

(c) a cicloide completa [2].

Usando as definições acima, as equações paramétricas para a cicloide são:

$$x = a(\theta - \text{sen } \theta) \quad (6.1)$$

$$y = a(1 - \text{cos } \theta) \quad (6.2)$$

- tautócrona

A tautócrona é a cicloide invertida, e podemos demonstrar que o tempo que um corpo leva para atingir seu ponto mínimo não depende da altura que foi lançado, mas apenas do raio⁴ da tautócrona. A figura 7 mostra vários corpos em uma tautócrona.

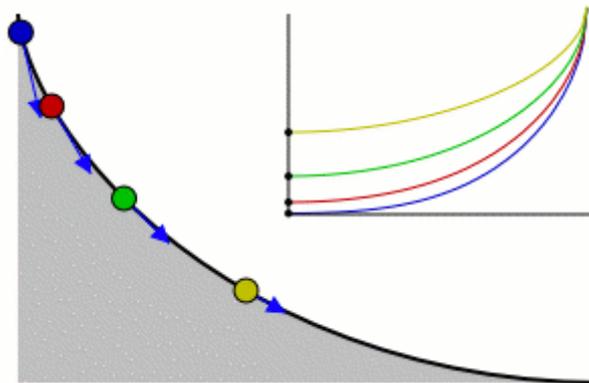


Figura 7 Esquema de quatro corpos descendo a partir de diferentes posições; em cada ponto é mostrado um vetor de aceleração (azul). No detalhe o gráfico da posição em relação ao tempo [3].

Na figura 7 vemos um esquema de bolinhas rolando sobre uma tautócrona, que embora lançadas a partir de pontos diferentes vão atingir o ponto de menor altura juntas. Em cada ponto um vetor mostra a aceleração da bolinha. O gráfico no detalhe da figura mostra a posição em função do tempo, e olhando para a curva azul vemos que a velocidade da bolinha azul (inclinação da reta tangente, como descrito no item 2, a derivada) na parte final do trajeto é maior que das outras bolinhas, pois está sofreu uma aceleração maior no início do percurso.

Vamos obter uma equação matemática que comprove que o tempo de queda não é função da posição inicial sendo o mesmo para todos os corpos [4].

⁴ Este raio deve ser interpretado como duas vezes o raio do disco que deu origem a cicloide (como na figura 4).

Uma vez que a tautócrona é uma curva cicloide invertida, as equações paramétricas são as mesmas:

$$x = a(\theta - \text{sen } \theta) \quad (6.3)$$

$$y = a(1 - \text{cos } \theta) \quad (6.4)$$

Para ver que a cicloide satisfaz a propriedade de ser uma tautócrona, vamos usar as derivadas das equações acima:

$$x' = a(1 - \text{cos } \theta) \quad (6.5)$$

$$y' = a \text{sen } \theta \quad (6.6)$$

somando as duas derivadas, temos:

$$x'^2 + y'^2 = a^2[(1 - 2\text{cos } \theta + \text{cos}^2 \theta) + \text{sen}^2 \theta] \quad (6.7)$$

que pode ser simplificada:

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2(1 - \text{cos } \theta) \quad (6.8)$$

Aplicando a lei de conservação da energia mecânica, entre o ponto mais baixo e uma altura inicial y temos, podemos obter a velocidade em função da altura:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad (6.9)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \quad (6.10)$$

O tempo de queda será então dado por:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} \quad (6.11)$$

que substituindo as equações (6.8) e (6.4) fica:

$$dt = \frac{a\sqrt{2(1 - \text{cos } \theta)}}{\sqrt{2ga(1 - \text{cos } \theta)}} d\theta \quad (6.12)$$

cancelando o termo em comum:

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}} d\theta \quad (6.13)$$

onde lembrando que a é o raio do disco que originou a cicloide.

Então, o tempo T necessário para que o corpo se desloque do ponto máximo para o mais baixo, será dado fazendo-se uma integração:

$$T = \int_0^{\pi} dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \pi \quad (6.14)$$

Mas, para um ponto qualquer θ_0 , a velocidade deve ser escrita:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y - y_0)} \quad (6.15)$$

então a integral que dá o tempo será:

$$T = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2a^2(1 - \cos \theta)}{2ag(\cos \theta - \cos \theta_0)}} d\theta \quad (6.16)$$

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta \quad (6.17)$$

Lembrando a formula do ângulo-metade:

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad (6.18a)$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad (6.18b)$$

A equação (6.18b) pode ser escrita como:

$$\cos \theta = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) - 1 \quad (6.19)$$

Assim substituindo (6.19) na equação (6.17):

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\sqrt{\cos\left(\frac{1}{2}\theta_0\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}} d\theta \quad (6.19)$$

Fazendo uma mudança de variáveis:

$$u = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)} \quad (6.20)$$

$$du = \frac{\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)}}{\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{2\cos\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)}} \quad (6.21)$$

Então, substituindo na integral e redefinindo os limites de integração:

$$T = -2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\sqrt{\frac{a}{g}} [\text{sen}^{-1}]_0^1 =$$

Substituindo os limites, finalmente,

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (6.22)$$

A equação (6.22) mostra que o tempo necessário para ir de um ponto até outro é constante, não dependendo da altura y .

-braquistócrona

Assim com a tautócrona, a braquistócrona também é uma cicloide invertida, e podemos demonstrar que o tempo que um corpo leva para ir do seu ponto máximo ao mínimo é sempre o mais rápido possível. Veremos como que a aplicação da equação de Euler mostra que a braquistócrona é uma cicloide invertida. A figura 6 mostra uma braquistócrona.

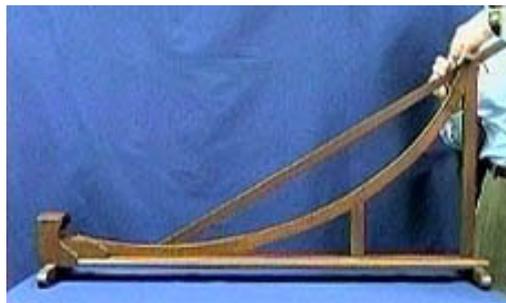


Figura 8 Uma curva braquistócrona feita em madeira [5].

Para resolver nosso problema (encontrar a forma da curva) vamos supor um corpo na origem de uma curva que está na direção vertical, para baixo, como na figura 9 abaixo:

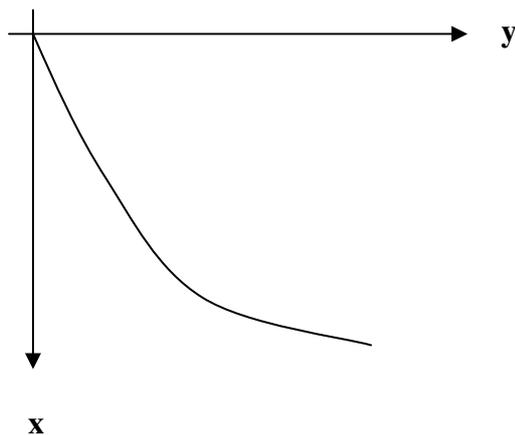


Figura 9 Eixos orientados para baixo e uma curva no quadrante positivo

Vimos na tautócrona o tempo necessário para o corpo percorrer uma distância ds :

$$t = \int_{(0,0)}^{(x1,y1)} \frac{ds}{v} = \int_{(0,0)}^{(x1,y1)} \sqrt{\frac{(dx^2 + dy^2)}{2gx}} \quad (6.23)$$

$$t = \int_{0,0}^{x1,y1} \sqrt{\frac{(1 + y'^2)}{2gx}} dx \quad (6.24)$$

O termo $\sqrt{2g}$ é constante em relação a nossa variável de integração, então pode sair da integral. Então a função a ser minimizada, a qual vamos usar a equação de Euler é:

$$f = \left(\frac{1 + y'^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.25)$$

Olhando a equação acima vemos facilmente que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ e a equação (5.13) então:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad \text{o que significa que a derivada em relação a } y' \text{ é constante em}$$

relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \kappa = \left(\frac{1}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.26)$$

Escolhemos a para ser a nova constante, para facilitar as futuras substituições.

Reescrevendo a equação (6.25)

$$f = (u)^{\frac{1}{2}}, \text{ onde } u = \frac{1 + y'^2}{x}$$

Agora usando a regra da cadeia para calcular a derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + y'^2}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2y'}{x} = \left(\frac{x}{1 + y'^2} \frac{y'^2}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2a} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Assim podemos escrever:

$$\left(\frac{y'^2}{x(1+y'^2)} \right) = \frac{1}{2a} \quad (6.26)$$

Podemos desenvolver a equação acima, até obter uma integral:

$$\begin{aligned} \frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2a} &\Rightarrow 2ay'^2 = x(1+y'^2) \Rightarrow 2ay'^2 - xy'^2 = x \Rightarrow y'^2(2a-x) = x \\ \Rightarrow y'^2 = \frac{x}{(2a-x)} = \frac{x^2}{(2ax-x^2)} &\Rightarrow y' = \frac{x}{(2ax-x^2)^{1/2}} \Rightarrow \int y' dx = \int \frac{xdx}{(2ax-x)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\text{Finalmente } \Rightarrow y = \int \frac{xdx}{(2ax-x)^{1/2}} \quad (6.27)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$x = a(1 - \cos \theta)$$

$$dx = a \cdot \text{sen} \theta \cdot d\theta$$

que faz a equação (6.27) se tornar:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= \int \frac{xdx}{(2ax-x)^{1/2}} = \int \frac{a(1-\cos \theta) \cdot a \cdot \text{sen} \theta \cdot d\theta}{\{2a^2(1-\cos \theta) - [a(1-\cos \theta)]^2\}^{-1/2}} = \\ &= \int \frac{a(1-\cos \theta) \cdot a \cdot \text{sen} \theta \cdot d\theta}{[2a^2 - 2a^2 \cos \theta - (a^2 - 2a^2 \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta)]^{-1/2}} = \int \frac{a^2(1-\cos \theta) \cdot \text{sen} \theta \cdot d\theta}{(a^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{-1/2}} = \\ &= \int \frac{a^2(1-\cos \theta) \cdot \text{sen} \theta \cdot d\theta}{a(1-\cos^2 \theta)^{-1/2}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$y = \int a(1 - \cos \theta) d\theta \quad (6.28)$$

Finalmente, encontramos:

$$y = a(\theta - \text{sen} \theta) + \text{constante}$$

Como o corpo passagem pela origem, devemos ter:

$$x = a(1 - \cos \theta) \quad (6.29)$$

$$y = a(\theta - \text{sen} \theta) \quad (6.30)$$

Estas são as equações paramétricas da cicloide invertida (com os eixos orientados para baixo). Este resultado mostra a cicloide invertida apresenta a propriedade de ser braquistócrona, isto é, é a curva que minimiza o tempo de queda do corpo. Demonstração em [6].

7. Conclusões

Construímos duas curvas em madeira que mostram que a cicloide invertida é uma curva tautócrona e braquistócrona.

Em um experimento envolvendo lançamentos de bolinhas de gude nas pistas, obtivemos que para a tautócrona o tempo que a bolinha demora para atingir o ponto de mínimo não depende da altura inicial, isto é, as duas bolinhas lançadas se chocam no ponto de menor altura, confirmando o previsto.

Realizando o mesmo experimento na segunda curva, que tem metade braquistócrona e a outra metade de forma modelável, observamos que as bolinhas sempre se chocam na parte modelável, pois o tempo de descida na primeira parte é sempre menor, confirmando a teoria.

As pistas feitas em madeira apresentam dimensões reduzidas, podendo ser apresentadas em sala de aula, mostrando conceitos físicos e matemáticos.

8. Referências

- [1] Marion J. B., Thornton S.T.; “*Classical Dynamics of Particles and Systems*”; 4ª ed., Saunders College Publishing, Florida, 1995. Referência com a dedução da equação de Euler.
- [2] <http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html> Referência com a figura de um pondo da borda do disco rolando, criando a cicloide
- [3] <http://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone> Referência usada para retirar a figura 7. Há uma animação interessante no site.
- [4] <http://mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html> Referência usada para a dedução do tempo de queda na tautócrona.
- [5] <http://home.olemiss.edu/~sicu2web/Me-Brach.htm> Referência com definições básicas e medidas de uma braquistócrona. Usada para consultas iniciais.
- [6] <http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html> Referência usada para a dedução das equações que resolvem o problema da braquistócrona.

9. Comentários

Meu orientador, o Prof. Marcelo Firer concorda com o expressado neste relatório final e deu a seguinte opinião:

“O projeto está bem redigido e inclui tanto um equacionamento matematicamente correto como uma proposta interessante de experimento para mostrar que a cicloide invertida é uma tautócrona e também um experimento bom o suficiente para fornecer fortes evidências de ser uma braquistócrona (ao menos localmente). Relatório Aprovado.”

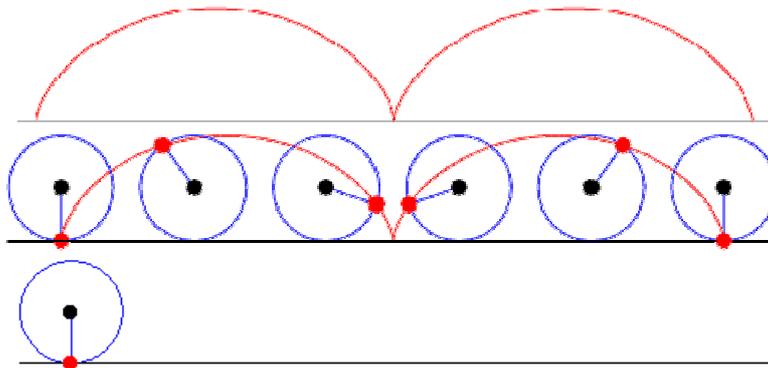
10. Agradecimentos

Agradeço ao Professor Marcelo Firer por sua orientação. A realização deste trabalho projeto também foi possível graças a Oficina Desafio (veja anexo), por permitir o uso do caminhão e de seus materiais e ferramentas. Site da Oficina: www.mc.unicamp.br/desafio.

11. Anexos

SITE: <http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html>

Cycloid



The cycloid is the locus of a point on the rim of a [circle](#) of [radius](#) r rolling along a straight [line](#). It was studied and named by Galileo in 1599. Galileo attempted to find the [area](#) by weighing pieces of metal cut into the shape of the cycloid. Torricelli, Fermat, and Descartes all found the [area](#). The cycloid was also studied by Roberval in 1634, Wren in 1658, Huygens in 1673, and Johann Bernoulli in 1696. Roberval and Wren found the [arc length](#) (MacTutor Archive). Gear teeth were also made out of cycloids, as first proposed by Desargues in the 1630s (Cundy and Rollett 1989).

In 1696, Johann Bernoulli challenged other mathematicians to find the curve which solves the [brachistochrone problem](#), knowing the solution to be a cycloid. Leibniz, Newton, Jakob Bernoulli and L'Hospital all solved Bernoulli's challenge. The cycloid also solves the [tautochrone problem](#), as alluded to in the following passage from *Moby Dick*: "[The try-pot] is also a place for profound mathematical meditation. It was in the left-hand try-pot of the *Pequod*, with the soapstone diligently circling round me, that I was first indirectly struck by the remarkable fact, that in geometry all bodies gliding along a cycloid, my soapstone, for example, will descend from any point in precisely the same time" (Melville 1851). Because of the frequency with which it provoked quarrels among mathematicians in the 17th century, the cycloid became known as the "Helen of Geometers" (Boyer 1968, p. 389).

The [cycloid catacaustic](#) when the rays are parallel to the [y-axis](#) is a cycloid with twice as many arches. The [radial curve](#) of a cycloid is a [circle](#). The [evolute](#) and [involute](#) of a cycloid are identical cycloids.

If the cycloid has a [cusp](#) at the [origin](#) and its humps are oriented upward, its parametric equation is

$$x = a(t - \sin t) \quad (1)$$

$$y = a(1 - \cos t). \quad (2)$$

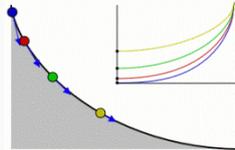
SITE: <http://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone>

Tautochrone curve

From Wikipedia, the free encyclopedia

(Redirected from [Tautochrone](#))

• [Learn more about using Wikipedia for research](#) •



Four points run over a cycloid from different positions, but they arrive at the bottom at the same time. The blue arrows show the points' acceleration. On the top is the time-position diagram.

A **tautochrone** or **isochrone curve** is the curve for which the time taken by an object sliding without friction in uniform [gravity](#) to its lowest point is independent of its starting point. The curve is a [cycloid](#), and the time is equal to π times the [square root](#) of the radius over the acceleration of gravity.

[\[edit\]](#) The tautochrone problem

The tautochrone problem, the attempt to identify this curve, was solved by [Christiaan Huygens](#) in [1659](#). He proved geometrically in his *Horologium oscillatorium* (*The [Pendulum Clock](#), 1673*) that the curve was a [cycloid](#). This solution was later used to attack the problem of the [brachistochrone curve](#). [Jakob Bernoulli](#) solved the problem using calculus in a paper (*[Acta Eruditorum](#), 1690*) that saw the first published use of the term [integral](#).

Later mathematicians such as [Joseph Louis Lagrange](#) and [Leonhard Euler](#) looked for an analytical solution to the problem.

SITE: <http://mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html>

Tautochrone Problem

The problem of finding the curve down which a bead placed anywhere will fall to the bottom in the same amount of time. The solution is a [cycloid](#), a fact first discovered and published by Huygens in *Horologium oscillatorium* (1673). This property was also alluded to in the following passage from *Moby Dick*: "[The try-pot] is also a place for profound mathematical meditation. It was in the left-hand try-pot of the *Pequod*, with the soapstone diligently circling round me, that I was first indirectly struck by the remarkable fact, that in geometry all bodies gliding along a cycloid, my soapstone, for example, will descend from any point in precisely the same time" (Melville 1851).

Huygens also constructed the first pendulum clock with a device to ensure that the pendulum was isochronous by forcing the pendulum to swing in an arc of a [cycloid](#). This is accomplished by placing two evolutes of inverted cycloid arcs on each side of the pendulum's point of suspension against which the pendulum is constrained to move (Wells 1991, p. 47; Gray 1997, p. 123). Unfortunately, friction along the arcs causes a greater error than that corrected by the cycloidal path (Gardner 1984).

The [parametric equations](#) of the [cycloid](#) are

$$x = a(\theta - \sin \theta) \tag{1}$$

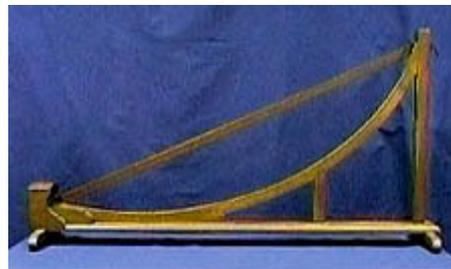
$$y = a(1 - \cos \theta). \tag{2}$$

SITE: <http://home.olemiss.edu/~sicu2web/Me-Brach.htm>

Brachistochrone & Tautochrone

MECHANICS #1

Brachistochrone
[Demonstration](#)
[Physics](#)
[History](#)



Characteristics:

122 mm (l) x 64 mm (h)

wooden tracks and base, glass marbles, metal gate and lever

[Tautochrone](#)

Demonstration
 Physics
 History

[References](#)

Back to the
[Mechanics](#)
 Index

This apparatus illustrates two properties of a curved path.

The first is that a falling object travels faster along a cycloidal path than along a straight-line path.

The second is that objects released from different points along the cycloidal curve arrive at the bottom of the curve at the same time.

The cycloid is the curve of the shortest time (brachistochrone) and the curve of the same time (tautochrone).

SITE: <http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html>

Find the shape of the [curve](#) down which a bead sliding from rest and [accelerated](#) by gravity will slip (without friction) from one point to another in the least time. The term derives from the Greek *βραχυστος* (*brachistos*) "the shortest" and *χρονος* (*chronos*) "time, delay."

The brachistochrone problem was one of the earliest problems posed in the [calculus of variations](#). Newton was challenged to solve the problem in 1696, and did so the very next day (Boyer and Merzbach 1991, p. 405). In fact, the solution, which is a segment

of a [cycloid](#), was found by Leibniz, L'Hospital, Newton, and the two Bernoullis. Johann Bernoulli solved the problem using the analogous one of considering the path of light refracted by transparent layers of varying density (Mach 1893, Gardner 1984, Courant and Robbins 1996). Actually, Johann Bernoulli had originally found an incorrect proof that the curve is a cycloid, and challenged his brother Jakob to find the required curve. When Jakob correctly did so, Johann tried to substitute the proof for his own (Boyer and Merzbach 1991, p. 417).

In the solution, the bead may actually travel uphill along the cycloid for a distance, but the path is nonetheless faster than a straight line (or any other line).

The time to travel from a point P_1 to another point P_2 is given by the [integral](#)

$$t_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v}, \quad (1)$$

where s is the [arc length](#) and v is the [speed](#). The [speed](#) at any point is given by a simple application of conservation of energy equating kinetic energy to gravitational potential energy,

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g y, \quad (2)$$

giving

$$v = \sqrt{2 g y}. \quad (3)$$

Plugging this into (\diamond) together with the identity

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4)$$

then gives

$$t_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2 g y}} dx \quad (5)$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2 g y}} dx. \quad (6)$$

The function to be varied is thus

$$f = (1 + y'^2)^{1/2} (2 g y)^{-1/2}. \quad (7)$$

To proceed, one would normally have to apply the full-blown [Euler-Lagrange differential equation](#)

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (8)$$

However, the function $f(x, y) = \sqrt{2gy} + \sqrt{1+y'^2}$ is particularly nice since x does not appear explicitly. Therefore, $\partial f / \partial x = 0$, and we can immediately use the [Beltrami identity](#)

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = C. \tag{9}$$

Computing

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = y' (1 + y'^2)^{-1/2} (2gy)^{-1/2}, \tag{10}$$

subtracting $y' (\partial f / \partial y')$ from f , and simplifying then gives

$$\frac{1}{\sqrt{2gy} \sqrt{1 + y'^2}} = C. \tag{11}$$

Squaring both sides and rearranging slightly results in

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] y = \frac{1}{2gC^2} \tag{12}$$

$$= k^2, \tag{13}$$

where the square of the old constant C has been expressed in terms of a new ([positive](#)) constant k^2 . This equation is solved by the [parametric equations](#)

$$x = \frac{1}{2} k^2 (\theta - \sin \theta) \tag{14}$$

$$y = \frac{1}{2} k^2 (1 - \cos \theta), \tag{15}$$

which are--lo and behold--the equations of a [cycloid](#).

SITE: Foto do caminhão da oficina, retirado de www.mc.unicamp.br

