

# Resolução de sistemas de equações não-lineares: Método de Newton

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

24 de setembro de 2012

Baseado no livro *Análise Numérica*, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Estamos interessados em encontrar  $x \in \mathbf{R}^n$  solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

com  $f_j$  função de  $\mathbf{R}^n$  em  $\mathbf{R}$ .

# Sistemas de equações não-lineares

Seguindo as idéias do método de Newton para uma única equação, podemos generalizar o método para resolver problemas com  $n$  equações.

Vamos definir

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1^T(x) \\ \nabla f_2^T(x) \\ \vdots \\ \nabla f_n^T(x) \end{pmatrix}$$

# Desenvolvimento do método de Newton

Usando a expansão de Taylor em torno de  $\bar{x}$  para a função  $F$ , de maneira análoga ao que foi feito no caso de uma única equação, podemos escrever

$$x^* \approx \bar{x} - J(\bar{x})^{-1}F(\bar{x}).$$

# Desenvolvimento do método de Newton

Assim, o método de Newton para resolver sistemas de equações não-lineares consiste em, dada uma **aproximação inicial**  $x_0$  da solução, calcular a aproximação

$$x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1}F(x_k)$$

a cada iteração  $k \geq 0$ , até que o critério de convergência seja satisfeito.

# Desenvolvimento do método de Newton

Para evitar o cálculo de  $J(x_k)^{-1}$ , geralmente resolve-se o sistema

$$J(x_k)p_k = -F(x_k)$$

em  $p_k$ . Então, calcula-se  $x_{k+1} = x_k + p_k$ .

Para resolver o sistema linear é usada alguma fatoração de  $J(x_k)$ , como, por exemplo, a **fatoração LU**.

# Exemplo 1

Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4 &= 0, \\2x - y^2 &= 0,\end{aligned}$$

que tem solução

$$x^* = \sqrt{5} - 1 \approx 1.236068 \text{ e } y^* = \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} \approx 1.572303.$$

# Exemplo 1

Lembre-se que

$$F(x) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ 2x - y^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J(x) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & -2y \end{pmatrix}$$



# Exemplo 1

A resolução desta equação usando o método de Newton, com aproximação inicial  $x_0 = (1, 1)$ , é dada por:

$$J(x_0)p_0 = -F(x_0)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p_0^1 \\ p_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_0 + p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.75 \end{pmatrix}$$

# Exemplo 1

$$J(x_1)p_1 = -F(x_1)$$

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 3.5 \\ 2 & -3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.6250 \\ -0.5625 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.013889 \\ -0.168651 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1 + p_1 = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.013889 \\ -0.168651 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.236111 \\ 1.581349 \end{pmatrix}$$

# Exemplo 1

A resolução desta equação usando o método de Newton, com aproximação inicial  $x_0 = (1, 1)$ , é dada por:

$k$	$x_k$	$F(x_k)$
0	(1.000000, 1.000000)	(-2.000000E+00, 1.000000E+00)
1	(1.250000, 1.750000)	( 0.625000E+00, -0.562500E+00)
2	(1.236111, 1.581349)	( 0.028636E+00, -0.028443E+00)
3	(1.236068, 1.572329)	( 8.137262E-05, -8.137076E-05)
4	(1.236068, 1.572303)	( 6.695751E-10, -6.695747E-10)

## Exemplo 2

Considere o problema anterior e tome a **aproximação inicial**  $x_0 = (-5, 5)$ . Ao aplicarmos o método de Newton para resolver o sistema de equações, obtemos o seguinte resultado:

$k$	$x_k$	$F(x_k)$
0	(-5.00000000, 5.00000000)	( 46.00000000, -35.00000000)
1	(-3.62500000, 1.77500000)	( 12.29125000, -10.40062500)
2	(-3.26488095, -0.951869551)	( 7.56550327, -7.43581755)
3	(-3.23625125, 2.923954680)	( 15.02283320, -15.02201350)
4	(-3.23606799, 0.355233792)	( 6.59832705, -6.59832702)
5	(-3.23606798, -8.932068180)	( 86.25397800, -86.25397800)
6	(-3.23606798, -4.103736370)	( 23.31278810, -23.31278810)
7	(-3.23606798, -1.263301940)	( 8.06806774, -8.06806774)
8	(-3.23606798, 1.929944070)	( 10.19682010, -10.19682010)
9	(-3.23606798, -0.711795716)	( 6.97878910, -6.97878910)
10	(-3.23606798, 4.190445850)	( 24.03197240, -24.03197240)
11	(-3.23606798, 1.322973840)	( 8.22239574, -8.22239574)
12	(-3.23606798, -1.784568990)	( 9.65682243, -9.65682243)

Suponha que  $F$  seja continuamente diferenciável em um conjunto convexo aberto  $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$ . Seja  $x^* \in \mathcal{D}$  uma solução não-degenerada de  $F(x) = 0$  e seja  $\{x_k\}$  a sequência gerada pelo método de Newton.

Então, quando  $x_k \in \mathcal{D}$  está suficientemente perto de  $x^*$ , temos que a sequência **converge superlinearmente** para a solução.

Mais ainda, se  $F$  for Lipschitz contínua perto de  $x^*$ , a **convergência é quadrática**.

# Dificuldades na aplicação do método de Newton

Apesar de apresentar convergência quadrática, o método de Newton apresenta alguns **inconvenientes**:

- 1 A **aproximação inicial** deve estar **próxima da solução** para que o método tenha convergência.
- 2 É necessário **calcular a derivada** de  $F$  em  $x_k$  **em toda iteração  $k$** .
- 3 No caso de sistemas com várias equações, é necessário **fatorar a matriz  $J(x_k)$**  para toda iteração  $k$ .
- 4 Quando  $n$  **é grande**, pode ser muito **custoso** calcular e fatorar  $J(x_k)$ .
- 5 Quando  $J(x_k)$  **é singular**, o método de Newton pode **não estar definido**.
- 6 A **raiz em questão pode ser degenerada**. Ou seja,  $J(x^*)$  pode ser singular.