Resolução de sistemas de equações lineares: Método de eliminação de Gauss

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

3 de setembro de 2012

Baseado no livro Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Estamos interessados em resolver o problema de encontrar uma solução para um sistema de equações lineares da forma

$$\left\{\begin{array}{lccccccccc} E_1: & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ E_2: & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & & & & & & & & \\ E_n: & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array}\right.$$

com a_{ij} e b_j constantes dadas.

Manipulação de sistemas de equações lineares

Há algumas operações que podem ser realizadas em um sistema de equações lineares, sem que sua solução seja alterada. São elas:

- A equação E_i pode ser multiplicada por qualquer constante λ não-nula e a equação resultante pode ser usada no lugar de E_i. Denotamos esta operação por $(\lambda E_i) \rightarrow (E_i)$.
- A equação E_j pode ser multiplicada por qualquer constante λ não-nula, adicionada à equação E_i e a equação resultante pode ser usada no lugar de E_i. Denotamos esta operação por $(\lambda E_j + E_i) \rightarrow (E_i)$.
- As equações E_i e E_j podem trocar de posições. Denotamos esta operação por $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$.

Manipulação de sistemas de equações lineares - exemplo

Queremos determinar os valores de x_1, x_2, x_3 e x_4 que satisfaçam as equações

$$\begin{cases} E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\ E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\ E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3, \\ E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4. \end{cases}$$

Manipulação de sistemas de equações lineares - exemplo

Primeiramente, usamos a equação E_1 para eliminar a incógnita x_1 das equações E_2, E_3 e E_4.

Isso é feito executando os seguintes passos:

- $(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$,
- $(E_3 - 3E_1) \to (E_3)$,
- $(E_4 + E_1) \to (E_4)$.

Manipulação de sistemas de equações lineares - exemplo

O sistema resultante é

$$\begin{cases} E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\ E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\ E_3: & & - & 4x_2 & - & x_3 & - & 7x_4 & = & -15, \\ E_4: & & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 8. \end{cases}$$

Neste novo sistema, usamos a equação E_2 para eliminar a incógnita x_2 das equações E_3 e E_4.

Fazemos isso executando os passos $(E_3 - 4E_2) \rightarrow (E_3)$ e $(E_4 + 3E_2) \rightarrow (E_4)$.

O sistema resultante é

$$\left\{ \begin{array}{lcccccccccc} E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4, \\ E_2: & & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\ E_3: & & & & & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 13, \\ E_4: & & & & & & - & 13x_4 & = & -13. \end{array} \right.$$

Agora o sistema se tornou triangular e ele pode ser resolvido usando um processo de substituição regressiva.

Pela equação E_4, temos que $x_4 = 1$.

Substituindo o valor de x_4 na equação E_3, temos que

$$x_3 = \frac{13 - 13x_4}{3} = 0.$$

Manipulação de sistemas de equações lineares - exemplo

Usando os valores de x_3 e x_4 na equação E_2, temos que

$$x_2 = 7 - x_3 - 5x_4 = 7 - 0 - 5 = 2.$$

Finalmente, substituindo os valores de x_2, x_3 e x_4 na equação E_1, temos que

$$x_1 = 4 - x_2 - 3x_4 = 4 - 2 - 3 = -1.$$

Portanto, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ e $x_4 = 1$.

Para realizar as operações descritas no exemplo anterior, não precisamos escrever todas as equações a cada passo, já que as variáveis não se alteram. Os únicos valores que mudam de um passo a outro são os coeficientes das variáveis e os valores no lado direito das equações.

Por isso, para facilitar a notação, escrevemos os sistemas usando matrizes.

Usando este formato, um sistema do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{cases}$$

fica escrito como $Ax = b$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Uma notação alternativa é a de matriz aumentada

$$[A, b] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right),$$

na qual a linha vertical é utilizada para separar os elementos da matriz A e do vetor b.

Representação de sistemas de equações lineares - exemplo

Note que o sistema do exemplo, usando a notação de matriz aumentada, fica

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Representação de sistemas de equações lineares - exemplo

Usando as operações para tornar o sistema triangular, temos as seguintes matrizes aumentadas:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right).$$

O método usado para resolver o sistema do exemplo é chamado de Método de eliminação de Gauss com substituição regressiva.

Para um sistema

$$\begin{cases} E_1: & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ E_2: & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & & & & & & & & \\ E_n: & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{cases}$$

o Método de eliminação de Gauss procede da seguinte maneira.

Método de eliminação de Gauss

Primeiramente, forme a matriz aumentada

$$\tilde{A} = [A, b] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1(n+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n(n+1)} \end{array} \right), \tag{1}$$

com $a_{i(n+1)} = b_i$, $1 \leq i \leq n$.

Método de eliminação de Gauss

Se $a_{11} \neq 0$, as operações correspondentes a $(E_j - (\frac{a_{j1}}{a_{11}})E_1) \to (E_j)$ são executadas para cada $j = 2, 3, ..., n$, para que os coeficientes de x_1 nas linhas diferentes de 1 passem a ser nulos.

Embora os elementos das linhas $2, 3, ..., n$ depois destas operações sejam possivelmente diferentes dos elementos correspondentes na matriz $\tilde{A}$ original, eles serão denotados da mesma forma, apenas para facilitar a notação.

Executamos, então, este mesmo procedimento para $i = 2, 3, ..., n - 1$, efetuando a operação $(E_j - (\frac{a_{ji}}{a_{ii}})E_i) \to (E_j)$ para cada $j = i + 1, i + 2, ..., n$, somente quando $a_{ii} \neq 0$.

Método de eliminação de Gauss

Isso faz com que os coeficientes de x_i sejam anulados para todas as linhas abaixo da linha i, para $1 \leq i \leq n - 1$.

A matriz resultante deste processo de eliminação de Gauss tem a forma

$$\tilde{\tilde{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1(n+1)} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & a_{n(n+1)} \end{array}\right),$$

na qual não se espera que os valores de a_{ij} coincidam com os valores correpondentes na matriz original $\tilde{A}$.

A matriz $\tilde{\tilde{A}}$ representa um sistema linear que tem o mesmo conjunto solução do sistema original (1).

Como o novo sistema é triangular,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad\;\; a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\; a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

podemos utilizar a substituição regressiva para resolvê-lo.

Método de substituição regressiva

Isolando x_n na n-ésima equação, temos

$$x_n = \frac{a_{n(n+1)}}{a_{nn}}.$$

Isolando x_{n-1} na $(n-1)$-ésima equação, temos

$$x_{n-1} = \frac{a_{(n-1)(n+1)} - a_{(n-1)n}x_n}{a_{(n-1)(n-1)}}.$$

Método de substituição regressiva

De forma geral, temos que

$$\boxed{x_i = \frac{a_{i(n+1)} - a_{in}x_n - a_{i(n-1)}x_{n-1} - \ldots - a_{i(i+1)}x_{i+1}}{a_{ii}} = \frac{a_{i(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}},}$$

para $i = n-1, n-2, ..., 1.$

O Método de eliminação de Gauss pode ser representado de maneira mais precisa formando uma sequência de matrizes aumentadas $\tilde{A}^{(1)}$, $\tilde{A}^{(2)}$, ..., $\tilde{A}^{(n)}$, na qual $\tilde{A}^{(1)}$ é a matriz original $\tilde{A}$ e $\tilde{A}^{(k)}$, para $k = 2, 3, ..., n$ tem elementos $a_{ij}^{(k)}$ dados por

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)}, & \text{se} \quad i = 1, 2, ..., k-1 \text{ e} \\ & \qquad j = 1, 2, ..., n+1, \\ 0, & \text{se} \quad i = k, k+1, ..., n \text{ e} \\ & \qquad j = 1, 2, ..., k-1, \\ a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{i(k-1)}^{(k-1)}}{a_{(k-1)(k-1)}^{(k-1)}} a_{(k-1)j}^{(k-1)}, & \text{se} \quad i = k, k+1, ..., n \text{ e} \\ & \qquad j = k, k+1, ..., n+1. \end{cases}$$

Método de eliminação de Gauss

Assim,

$$\tilde{A}^{(k)} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1(k-1)}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & a_{1(n+1)}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2(k-1)}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & a_{2(n+1)}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(k-1)(k-1)}^{(k-1)} & a_{(k-1)k}^{(k-1)} & \dots & a_{(k-1)n}^{(k-1)} & a_{(k-1)(n+1)}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} & a_{k(n+1)}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} & a_{n(n+1)}^{(k)} \end{array} \right)$$

representa o sistema linear equivalente no qual a variável x_{k-1} acabou de ser eliminada das equações E_k, E_{k+1}, ..., E_n.

Note que este processo falha quando um dos elementos $a_{11}^{(1)}$, $a_{22}^{(2)}$, ..., $a_{nn}^{(n)}$ for nulo, pois o passo

$$\left(E_i - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} E_k\right) \rightarrow E_i$$

não pode ser realizado ou a substituição regressiva não poderá ser aplicada.

Neste caso, o sistema ainda pode ter solução, mas o algoritmo terá de sofrer uma pequena alteração.

Método de eliminação de Gauss - exemplo

Considere o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{lrcrcrcrcr} E_1: & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -8, \\ E_2: & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -20, \\ E_3: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & -2, \\ E_4: & x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 4. \end{array} \right.$$

Método de eliminação de Gauss - exemplo

A matriz aumentada é dada por

$$\tilde{A} = \tilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Método de eliminação de Gauss - exemplo

Efetuando as operações $(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$, $(E_3 - E_1) \to (E_3)$ e $(E_4 - E_1) \to (E_4)$, temos

$$\tilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array} \right).$$

Como $a_{22}^{(2)}$ (chamado de elemento pivô) é nulo, o procedimente não pode continuar.

Mas a operação $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$ é permitida. Então, procuramos um elemento na coluna 2, abaixo da linha 2, que não seja nulo. Neste caso, o elemento $a_{32}^{(2)}$.

Efetuamos, então, a operação $(E_2) \leftrightarrow (E_3)$, gerando a matriz aumentada

$$\tilde{A}^{(2)'} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right).$$

Método de eliminação de Gauss - exemplo

Como x_2 já foi eliminado das equações E_3 e E_4, $\tilde{A}^{(3)}$ será igual a $\tilde{A}^{(2)'}$.

Efetuando a operação $(E_4 + 2E_3) \rightarrow (E_4)$, temos

$$\tilde{A}^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

Por fim, a substituição regressiva é aplicada:

$$x_4 = \frac{4}{2} = 2,$$

$$x_3 = \frac{-4 + x_4}{-1} = 2,$$

$$x_2 = \frac{6 - x_4 + x_3}{2} = 3,$$

$$x_1 = \frac{-8 + x_4 - 2x_3 + x_2}{1} = -7.$$

Algoritmo

Método de eliminação de Gauss: dados o número n de equações e variáveis, uma matriz aumentada $[A, b]$, com n linhas e $n+1$ colunas, devolve um sistema linear triangular inferior equivalente ao sistema inicial ou emite uma mensagem de erro.

Passo 1: Para $i = 1, ..., n-1$, execute os passos 2 a 3:

Passo 2: Se $a_{ii} = 0$ então
escreva "não é possível continuar" e pare.

Passo 3: Para $j = i+1, ..., n$, execute os passos 4 e 5:

Passo 4: Faça $m_{ji} \leftarrow \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$.

Passo 5: Faça $(E_j - m_{ji}E_i) \rightarrow (E_j)$.

Passo 6: Devolva $[A, b]$ como solução e pare.

Algoritmo

Método de substituição regressiva: dados o número n de equações e variáveis, uma matriz aumentada $[A, b]$, com n linhas, $n+1$ colunas e A triangular inferior, resolve o sistema linear ou emite uma mensagem dizendo que a solução do sistema linear não é única.

Passo 1: Se $a_{nn} = 0$, então escreva "não existe uma solução única" e pare.

Passo 2: Faça $x_n \leftarrow \frac{a_{n(n+1)}}{a_{nn}}$.

Passo 3: Para $i = n-1, ..., 1,$, execute os passos 4 e 5:

Passo 4: Se $a_{ii} = 0$, então
escreva "não existe uma solução única" e pare.

Passo 5: Faça $x_i \leftarrow \frac{a_{i(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$.

Passo 6: Devolva $(x_1, x_2, ..., x_n)$ como solução e pare.

Exemplo

Vejamos agora um exemplo do que pode acontecer quando o Método de eliminação de Gauss com substituição regressiva falha.

Considere os sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 6, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6. \end{array}\right.$$

Exemplo

As matrizes aumentadas geradas são

$$\tilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad \tilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Exemplo

Realizando as operações $(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$ e $(E_3 - E_1) \to (E_3)$, temos

$$\tilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad \tilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Como, em ambos os sistemas, $a_{22}^{(2)} = a_{32}^{(2)} = 0$, o algoritmo para dizendo que não há solução única.

Exemplo

De fato, se analisarmos os sistemas, temos que:

- No primeiro sistema, há infinitas soluções. Sempre que $x_3 = 2$, $x_2 = 2 - x_1$ e x_1 é qualquer número real, temos uma solução para o sistema.
- No segundo sistema, não há solução. Note que temos a contradição $x_3 = 2$ e $x_3 = 4$.

Apesar de podermos pensar que o Método de eliminação de Gauss constrói uma sequência de matrizes aumentadas, os elementos das novas matrizes podem ser armazenados na própria matriz original.

Além disso, os multiplicadores m_{ji} podem ser armazenados na porção triangular inferior da matriz, no lugar dos zeros.

Análise dos algoritmos

O tempo gasto para a execução do Método de eliminação de Gauss com substituição regressiva depende do número de operações que são executadas.

No Método de eliminação de Gauss, são realizadas operações apenas nos passos 5 e 6. No Passo 5 é realizada uma divisão para cada valor de $j = i + 1, ..., n$, ou seja, são realizadas $(n - i)$ divisões.

No Passo 6, a substituição da equação E_j por $(E_j - m_{ji}E_i)$ exige que sejam realizadas $(n - i)(n - i + 1)$ multiplicações e a mesma quantidade de subtrações.

Como os passos 5 e 6 são executados para cada valor de i, $i = 1, ..., n-1$, a quantidade de multiplicações/divisões executadas é dada por

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+2) = \sum_{i=1}^{n-1}(n^2 - 2ni + i^2 + 2n - 2i) =$$

$$(n^2+2n)\sum_{i=1}^{n-1}1 - 2(n+1)\sum_{i=1}^{n-1}i + \sum_{i=1}^{n-1}i^2 = \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}.$$

Análise dos algoritmos

E a quantidade de adições/subtrações executadas é dada por

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n-1}(n^2 - 2ni + i^2 + n - i) =$$

$$(n^2+n)\sum_{i=1}^{n-1} 1 - (2n+1)\sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n^3 - n}{3}.$$

Para a substituição regressiva, é executada uma divisão no Passo 2.

No Passo 5, são realizadas $(n-i)$ multiplicações e $(n-i-1)$ adições para cada termo da somatória e, a seguir, uma subtração e uma divisão.

Como o Passo 5 é executado para cada valor de i, $i = n-1, \ldots, 1$, a quantidade de multiplicações/divisões executadas é dada por

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} ((n-i)+1) = \frac{n^2+n}{2}.$$

E a quantidade de adições/subtrações executadas é dada por

$$\sum_{i=1}^{n-1}((n-i-1)+1)=\frac{n^2-n}{2}.$$

Assim, o Método de eliminação de Gauss gasta $O(n^3)$ operações.

E o Método de substituição regressiva gasta $O(n^2)$ operações