Sistemas Lineares

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

7 de agosto de 2012

Introdução

Uma grande variedade de problemas da engenharia pode ser resolvida através da análise linear, entre eles podemos citar:

- determinação do potencial em redes elétricas,
- cálculo da tensão em estruturas metálicas da construção civil,
- etc.

O problema matemático em todos estes casos se reduz a resolver um sistema de equações simultâneas.
A maioria dessas aplicações envolve um conjunto de equações lineares.

Uma equação é linear se cada termo contém não mais do que uma variável e cada variável aparece na primeira potência.

Exemplos:

- $3x + 4y - 10z = 3$ – é linear;
- $xy - 3z = 7$ – não é linear;
- $x^3 + y - z = 5$ – não é linear.

Introdução

Considere n equações lineares e n variáveis (incógnitas). Vamos nos referir a elas como um Sistema Linear de ordem n.

Uma solução para este sistema de equações consiste de valores para as n variáveis, tais que quando esses valores são substituídos nas equações, todas são satisfeitas simultaneamente.

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 1 \\
x - y - z &= 1 \\
2x + 3y - 4z &= 9
\end{aligned}
$$

A solução deste sistema linear é: $x = 1, y = 1$ e $z = -1$

Introdução

Um sistema linear com m equações e n variáveis é escrito usualmente na forma:

$$
\begin{array}{lllllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\ldots & & & & & \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

em que a_{ij} são os coeficientes; x_j são as variáveis e b_j são as constantes.

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como $Ax = b$.

Introdução

Dado um sistema linear: $Ax = b$, nosso objetivo é encontrar uma solução para o sistema, ou seja, encontrar x tal que $Ax = b$.

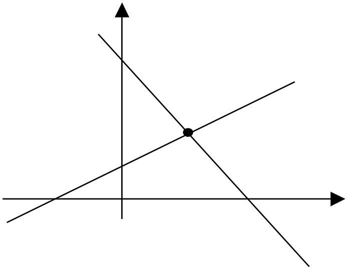
Classificação de um Sistema Linear

Um sistema linear pode ser:

- Sistema Possível ou Consistente: é todo sistema que possui pelo menos uma solução, ele pode ser:
  - Determinado: se admite uma única solução;
  - Indeterminado: se admite mais de uma solução.
- Sistema impossível ou inconsistente: é todo sistema que não admite solução.

Exemplo: solução única

$$2x + y = 3$$
$$x - 3y = -2$$
solução $x = (11)^T$

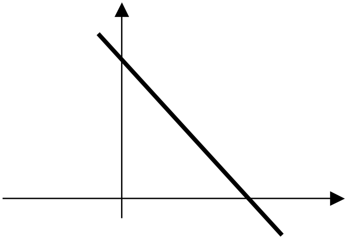


Classificação de um Sistema Linear

Exemplo: infinitas soluções

$$2x + y = 3$$
$$4x + 2y = 6$$

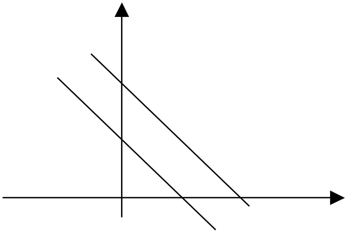
solução $x = (\alpha 3 - 2\alpha)^T$ com $\alpha \in R$



Classificação de um Sistema Linear

Exemplo: nenhuma solução

$$2x + y = 3$$
$$4x + 2y = 2$$



Objetivos

Vamos estudar métodos numéricos para resolver sistemas lineares de ordem n, que tenham solução única.

Observe que tais sistemas são aqueles onde a matriz dos coeficientes é não singular, ou seja,

$$det(A) \neq 0$$

Objetivos

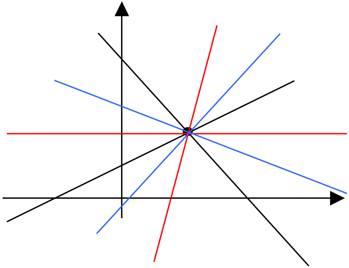
Os métodos numéricos para a solução de sistemas lineares são divididos principalmente em dois grupos:

- Métodos Exatos: forneceriam uma solução exata em um número finito de operações, senão fossem os erros de arredondamento (erros se acumulam);
- Métodos Iterativos: são aqueles que permitem obter uma solução com uma dada precisão através de um processo infinito convergente (erros não se acumulam).

Sistemas Lineares Equivalentes

Definição: dois sistemas são equivalentes quando admitem a mesma solução.

Exemplo:



Um sistema linear de ordem n é dito triangular inferior se ele tiver a forma:

$$\begin{array}{llllcl}
a_{11}x_1 & & & & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & & & = & b_2 \\
\ldots & & & & & \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

e triangular superior se tiver a forma:

$$\begin{array}{llllcl}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\ldots & & & & & \\
 & & & +a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Solução de Sistemas Triangulares

Ambos podem ser facilmente resolvidos por:

Triangular inferior:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$
$$x_k = \frac{b_k - (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{k,k-1}x_{k-1})}{a_{kk}}$$

Triangular superior:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$
$$x_k = \frac{b_k - (a_{k,k+1}x_{k+1} + a_{k,k+2}x_{k+2} + \ldots + a_{k,n}x_n)}{a_{kk}}$$

Número de operações: $O(n^2)$.