Autovalores e Autovetores

Marina Andretta / Franklina Toledo
Baseado no livro Cálculo Numérico, de Neide B. Franco.

3 de setembro de 2012

Definição: um escalar $\lambda \in R$ é um autovalor da matriz A, se existe um vetor não nulo $v \in R^n$, tal que $Av = \lambda v$.

Todo vetor v que satisfaz essa relação é chamado de autovetor de A correspondente ao autovalor λ.

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, temos que:

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Polinômio Característico

Temos que $Av = \lambda v$, logo podemos escrever $Av - \lambda v = 0$, ou ainda,

$$(A - \lambda I)v = 0$$

se o $det(A - \lambda I) \neq 0$ então o sistema linear acima tem uma única solução $v = 0$. Como estamos procurando $v \neq 0$, tal que $Av = \lambda v$, vamos impor que $det(A - \lambda I) = 0$, ou seja,

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$$

em que $P(\lambda)$ é um polinômio em λ de grau n e os autovalores procurados são as raízes deste polinômio.

$P(\lambda)$ é chamado de **Polinômio Característico da matriz** A.

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, o polinômio característico de A é dado por:

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - (3 * 2) = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Cujas raízes são: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$.

Objetivo

Estudar métodos numéricos para a determinação de autovalores e seus correspondentes autovetores de uma matriz A de ordem n.

Métodos numéricos:

1. métodos que determinam o polinômio característico;
2. métodos que determinam alguns autovalores;
3. métodos que determinam todos os autovalores.