Solução básica viável inicial

Marina Andretta

ICMC-USP

10 de outubro de 2016

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Solução básica viável inicial

Para aplicar o Método Simplex, precisamos de uma solução básica viável inicial.

Em alguns casos, ela é fácil de ser calculada. Por exemplo, suponha que desejamos resolver um problema com restrições escritas na forma $Ax \leq b$, com $b \geq 0$.

Podemos acrescentar variáveis de folga s não-negativas e reescrever as restrições como $Ax + s = b$.

O vetor (x, s) definido por $x = 0$ e $s = b$ é uma solução básica viável e a matriz base correspondente é a identidade.

Solução básica viável inicial

No caso geral, no entanto, encontrar uma solução básica viável inicial não é simples. Para isso, é necessário encontrar uma solução para um problema de programação linear auxiliar.

Considere o problema

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{minimizar} & c^T x & & \\
\text{sujeita a} & Ax & = & b, \\
 & x & \geq & 0.
\end{array}
$$

Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $b \geq 0$ (caso alguma componente de b seja negativa, basta multiplicar a restrição correspondente por -1).

Solução básica viável inicial

Acrescentamos um vetor de variáveis artificiais $y \in \boldsymbol{R}^m$ e usamos o Método Simplex para resolver o problema auxiliar

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimizar} & y_1 + y_2 + \ldots + y_m & & \\ \text{sujeita a} & Ax + y & = & b, \\ & x & \geq & 0, \\ & y & \geq & 0. \end{array}$$

Encontrar uma solução básica viável inicial para este problema auxiliar é fácil: basta considerar $x = 0$ e $y = b$. A base associada a esta solução é a matriz identidade.

Solução básica viável inicial

Note que, se x é uma solução viável do problema original, esta escolha de x e $y = 0$ tem custo nulo para o problema auxiliar.

Portanto, se o custo ótimo para o problema auxiliar é não-nulo, temos que o problema original é inviável.

Se, por outro lado, obtemos uma solução com custo nulo para o problema auxiliar, ela deve satisfazer $y = 0$. Neste caso, x é uma solução básica viável para o problema original.

Solução básica viável inicial

Assim, temos um método que ou detecta inviabilidade do problema, ou calcula uma solução básica viável inicial.

No entanto, para aplicar o Método Simplex ao problema original, precisamos também da base B associada à solução básica viável inicial e, dependendo da implementação, o tableau correspondente.

Isso é facilmente obtido caso o Método Simplex aplicado ao problema auxiliar termine com uma matriz base B que contém apenas colunas da matriz A.

Neste caso, basta eliminar as colunas correspondentes às variáveis artificiais e continuar aplicando o Método Simplex no problema original, usando B como a matriz inicial.

Caso o problema original seja viável, o Método Simplex seja aplicado para resolver o problema auxiliar, ele termine sua execução em uma solução viável x^* do problema original, mas alguma variável artificial esteja na base final, temos uma situação mais complicada para calcular uma base B inicial para resolver o problema original.

Neste caso, como o valor das variáveis artificiais é 0, temos uma solução básica viável degenerada para o problema auxiliar.

Eliminando variáveis artificiais da base

Seja k o número de colunas de A que estão na base final ($k < m$). Suponha, quem perda de generalidade, que estas sejam as colunas $A_{B(1)}, ..., A_{B(k)}$.

Note que $x_{B(1)}, ..., x_{B(k)}$ são as únicas variáveis que podem não valer 0.

Como $A_{B(1)}, ..., A_{B(k)}$ fazem parte da base, elas devem ser linearmente independentes.

Eliminando variáveis artificiais da base

Como estamos supondo que as linhas de A são linearmente independentes, as colunas de A geram $\boldsymbol{R}^m$ e, por isso, podemos escolher $m - k$ colunas adicionais $A_{B(k+1)}, \ldots, A_{B(m)}$ de A de forma que as colunas $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ sejam linearmente independentes.

Ou seja, é possível encontrar uma base formada exclusivamente por colunas de A, como queremos.

Com esta base, todos os elementos não-básicos de x^* valem 0 e segue que x^* é uma solução básica viável associada a esta nova base também.

Ao fazer isso, as variáveis artificiais, bem como suas correspondentes colunas no tableau, podem ser eliminadas.

Eliminando variáveis artificiais da base

O procedimento que acabamos de descrever depende fortemente da suposição que as m linhas de A são todas linearmente independentes.

Se isso não for verdade, é impossível construir uma base para $\mathbb{R}^m$ usando colunas de A e existem restrições de igualdade redundantes que devem ser eliminadas.

Isso pode ser feito mecanicamente, usando o tableau completo, como descrevemos a seguir.

Eliminando variáveis artificiais da base

Suponha que a ℓ-ésima variável básica seja uma variável artificial, que vale 0.

Examinamos a ℓ-ésima linha do tableau e encontramos um j tal que a ℓ-ésima entrada de $B^{-1}A_j$ é não-nula.

Vamos ver que A_j é linearmente independente das colunas $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(k)}$.

Eliminando variáveis artificiais da base

Note que $B^{-1}A_{B(i)} = e_i$, para $i = 1, ..., k$. Como $k < \ell$, a componente ℓ desses vetores é nula.

Portanto, qualquer combinação linear desses vetores terá a componente ℓ nula.

Como a componente ℓ de $B^{-1}A_j$ é não-nula, este vetor não é uma combinação linear de $B^{-1}A_{B(1)}, ..., B^{-1}A_{B(k)}$.

Equivalentemente, A_j não é combinação linear de $A_{B(1)}, ..., A_{B(k)}$.

Eliminando variáveis artificiais da base

Fazemos, então, A_j entrar na base e a ℓ-ésima variável sair da base.

Isso é feito da maneira usual: realizando as operações elementares de linha que transformam $B^{-1}A_j$ da ℓ-ésima coluna da identidade.

A única diferença em relação ao Simplex usual é que o elemento pivô (ℓ-ésimo elemento de $B^{-1}A_j$) pode ser negativo.

Eliminando variáveis artificiais da base

Como a ℓ-ésima variável básica era nula, somar um múltiplo da ℓ-ésima linha às outras linhas não muda o valor das variáveis básicas.

Isso significa que depois da mudança da base, permanecemos na mesma solução básica viável do problema auxiliar, mas reduzimos o número de variáveis básicas artificiais em um.

Repetimos este processo tantas vezes quanto necessário, até que todas as variáveis artificiais tenham sido removidas da base.

Eliminando variáveis artificiais da base

Suponha agora que a ℓ-ésima linha de $B^{-1}A_j$ seja nula. Neste caso, o procedimento descrito não pode ser aplicado.

Note que a ℓ-ésima linha de $B^{-1}A_j$ é igual a $g^T A$, com g^T a ℓ-ésima linha de B^{-1}.

Portanto, $g^T A = 0^T$, para um vetor não-nulo g, e a matriz A tem linhas linearmente dependentes. Como estamos lidando com um problema viável, temos também que $g^T b = 0$.

Portanto, a restrição $g^T Ax = g^T b$ é redundante e pode ser eliminada.

Como esta restrição é a informação dada pela ℓ-ésima linha do tableau, podemos eliminar esta linha e continuar a execução do algoritmo.

Exemplo 1

Considere o problema de programação linear

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{minimizar} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & \\
\text{sujeita a} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 3, \\
& -x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2, \\
& & & 4x_2 & + & 9x_3 & & & = & 5, \\
& & & & & 3x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
& & & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0.
\end{array}
$$

Exemplo 1

Para encontrar uma solução viável, construímos o problema auxiliar

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcrcl}
\text{minimizar} & & & & & & & & & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & + & x_8 & & \\
\text{sujeita a} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & + & x_5 & & & & & & & = & 3, \\
& -x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & & & + & x_6 & & & & & = & 2, \\
& & & 4x_2 & + & 9x_3 & & & & & & & + & x_7 & & & = & 5, \\
& & & & & 3x_3 & + & x_4 & & & & & & & + & x_8 & = & 1, \\
& & & & & & & & & \multicolumn{7}{r}{x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6,\, x_7,\, x_8} & \geq & 0.
\end{array}
$$

Uma solução básica viável para o problema auxiliar é $(x_5, x_6, x_7, x_8) = b = (3, 2, 5, 1)$. A matriz base correspondente é a matriz identidade. Além disso, temos $c_B = (1, 1, 1, 1)$.

Exemplo 1

Calculamos os custos reduzidos para cada variável original x_i, dados por $-c_B^T A_i$, e montamos o tableau original:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	-11	0	-8	-21	-1	0	0	0	0
$x_5 =$	3	1	2	3	0	1	0	0	0
$x_6 =$	2	-1	2	6	0	0	1	0	0
$x_7 =$	5	0	4	9	0	0	0	1	0
$x_8 =$	1	0	0	3	1	0	0	0	1

Exemplo 1

Como os custos reduzidos das variáveis x_2, x_3 e x_4 são negativos, podemos escolher uma destas variáveis para entrar na base. Vamos escolher a variável x_4.

Assim, a variável x_8 deve sair da base. O pivô está destacado no tableau:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	-11	0	-8	-21	-1	0	0	0	0
$x_5 =$	3	1	2	3	0	1	0	0	0
$x_6 =$	2	-1	2	6	0	0	1	0	0
$x_7 =$	5	0	4	9	0	0	0	1	0
$x_8 =$	1	0	0	3	$\underline{\mathbf{1}}$	0	0	0	1

Exemplo 1

Atualizando o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	-10	0	-8	-18	0	0	0	0	1
$x_5 =$	3	1	2	3	0	1	0	0	0
$x_6 =$	2	-1	2	6	0	0	1	0	0
$x_7 =$	5	0	4	9	0	0	0	1	0
$x_4 =$	1	0	0	3	1	0	0	0	1

Exemplo 1

Podemos escolher a variável x_2 ou x_3 para entrar na base. Escolhemos x_3.

Com esta escolha, tanto x_6 como x_4 podem sair da base. Escolhemos x_4. O elemento pivô está destacado:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	-10	0	-8	-18	0	0	0	0	1
$x_5 =$	3	1	2	3	0	1	0	0	0
$x_6 =$	2	-1	2	6	0	0	1	0	0
$x_7 =$	5	0	4	9	0	0	0	1	0
$x_4 =$	1	0	0	$\underline{\mathbf{3}}$	1	0	0	0	1

Exemplo 1

Atualizando o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	-4	0	-8	0	6	0	0	0	7
$x_5 =$	2	1	2	0	-1	1	0	0	-1
$x_6 =$	0	-1	2	0	-2	0	1	0	-2
$x_7 =$	2	0	4	0	-3	0	0	1	-3
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

Exemplo 1

Agora a única variável que pode entrar na base é x_2. Assim, x_6 deve sair da base. O elemento pivô está destacado:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	-4	0	-8	0	6	0	0	0	7
$x_5 =$	2	1	2	0	-1	1	0	0	-1
$x_6 =$	0	-1	$\underline{\mathbf{2}}$	0	-2	0	1	0	-2
$x_7 =$	2	0	4	0	-3	0	0	1	-3
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

Exemplo 1

Atualizando o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	-4	-4	0	0	-2	0	4	0	-1
$x_5 =$	2	2	0	0	1	1	-1	0	1
$x_2 =$	0	-1/2	1	0	-1	0	1/2	0	-1
$x_7 =$	2	2	0	0	1	0	-2	1	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

Agora, tanto a variável x_1 com o a variável x_4 podem entrar na base. Escolhemos x_1.

Neste caso, tanto x_5 como x_7 pode sair da base. Escolhemos x_5. O elemento pivô está destacado:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	-4	-4	0	0	-2	0	4	0	-1
$x_5 =$	2	$\underline{\mathbf{2}}$	0	0	1	1	-1	0	1
$x_2 =$	0	-1/2	1	0	-1	0	1/2	0	-1
$x_7 =$	2	2	0	0	1	0	-2	1	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

Exemplo 1

Atualizando o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	0	0	0	0	0	2	2	0	1
$x_1 =$	1	1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	1/2
$x_2 =$	1/2	0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0	-3/4
$x_7 =$	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

Neste ponto, todos os custos reduzidos são não-negativos, então encontramos a solução ótima para o problema auxiliar. Além disso, o custo ótimo é 0, o que significa que temos um ponto viável para o problema original.

Exemplo 1

No entanto, a variável artificial x_7 está na base. Para obter uma solução básica viável para o problema original, precisamos tirar x_7 da base.

Note que x_7 é a terceira variável básica e a terceira entrada das colunas $B^{-1}A_j$, $j = 1, ..., 4$, associadas às variáveis originais, é 0.

Isso indica que a matriz A original tem linhas linearmente dependentes.

Podemos, então, remover a terceira linha do tableau, porque ela corresponde a uma restrição redundante. Depois disso, podemos também remover todas as variáveis artificiais.

Exemplo 1

Isso deixa o seguinte tableau para o problema original:

		x_1	x_2	x_3	x_4
	*	*	*	*	*
$x_1 =$	1	1	0	0	1/2
$x_2 =$	1/2	0	1	0	-3/4
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3

Agora podemos calcular os custos reduzidos para as variáveis originais, completar o tableau e começar a execução do Método Simplex para resolver o problema original.

Exemplo 1

Note que, para este exemplo, a variável artificial x_8 foi desnecessária.

Em vez de começar com $x_8 = 1$, poderíamos começar com $x_4 = 1$, eliminando a necessidade do primeiro pivô.

De maneira geral, sempre que há uma variável que aparece em uma única restrição e com coeficiente positivo, podemos sempre deixar esta variável na base inicial e não precisamos associar uma variável artificial a esta restrição.

Podemos agora definir um algoritmo completo para resolver problemas de programamção linear na forma padrão, chamado de Método Simplex de duas fases.

Fase I:

P1. Se necessário, multiplique restrições por -1, de modo que $b \geq 0$.

P2. Introduza variáveis artificiais $y_1, ..., y_m$, se necessário, e aplique o Método Simplex ao problema auxiliar com custo $\sum_{i=1}^{m} y_i$.

P3. Se o custo ótimo do problema auxiliar é positivo, o problema original é inviável e o algoritmo pára.

P4. Se o custo ótimo do problema auxiliar é zero, uma solução viável para o problema original foi encontrada.

Se nenhuma variável artificial está na base final, as variáveis artificiais e as colunas correspondentes são eliminadas e tem-se uma base viável para o problema original.

P5. Se a ℓ-ésima variável básica é uma variável artificial, examine o ℓ-ésimo elemento das colunas $B^{-1}A_j$, para $j = 1, ..., n$.

Se todos estes elementos são 0, a linha ℓ representa uma restrição redundante e pode ser eliminada.

Caso contrário, se o ℓ-ésimo elemento de uma coluna j é não-nulo, aplique uma mudança de base (com este elemento servindo como pivô): a ℓ-ésima variável básica sai e a variável x_j entra na base.

Repita este procedimento até que todas as variáveis artificiais tenham saído da base.

Fase II:

P1. Sejam a base final e o tableau obtidos na Fase I a base e o tableau iniciais para a Fase II.

P2. Calcule os custos reduzidos de todas as variáveis para a base inicial, usando os coeficientes de custo do problema original.

P3. Aplique o Método Simplex ao problema original.

Método Simplex de duas fases

O Método Simplex de duas fases apresentado é completo, no sentido que ele lida com todas as possíveis situações. Desde que a ciclagem seja evitada (devido à não-degenerescência ou a regras de pivotamento), as possibilidades são as seguintes.

- Se o problema é inviável, isso é detectado na Fase I.
- Se o problema é viável, mas linhas de A são linearmente dependentes, isso é detectado e corrigido no final da Fase I, eliminando restrições de igualdade redundantes.
- Se o custo ótimo é $-\infty$, isso é detectado na Fase II.
- Caso contrário, a Fase II termina com a solução ótima.

Método do M-grande (ou *big*-M)

Vejamos agora o Método do M-grande, que combina as duas fases em uma só.

A ideia é introduzir uma função de custo

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} y_i,$$

com M uma constante positiva grande e y_i variáveis artificiais como na Fase I do Simplex.

Método do M-grande (ou *big*-M)

Para M suficientemente grande, se o problema original é viável e o custo ótimo é finito, todas as variáveis artificiais vão para 0, o que nos leva à minimização da função objetivo original.

De fato, não é necessário fixar um valor numérico para M. Podemos deixar M como um parâmetro indeterminado e calcular os custos reduzidos em função de M.

Sempre que M é comparado com outro número (para decidir se um custo reduzido é negativo), M será tratado como maior.

Exemplo 2

Considere o mesmo problema de programação linear do Exemplo 1:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{minimizar} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & \\
\text{sujeita a} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 3, \\
& -x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2, \\
& & & 4x_2 & + & 9x_3 & & & = & 5, \\
& & & & & 3x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
& & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Exemplo 2

Usaremos o Método do M-grande com o problema auxiliar

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
\text{minimizar} & x_1 + & x_2 + & x_3 & & + Mx_5 & + Mx_6 & + Mx_7 & \\
\text{sujeita a} & x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 & & + x_5 & & & = 3, \\
& -x_1 + & 2x_2 + & 6x_3 & & & + x_6 & & = 2, \\
& & 4x_2 + & 9x_3 & & & & + x_7 & = 5, \\
& & & 3x_3 + & x_4 & & & & = 1, \\
& & & & x_1, x_2, & x_3, x_4, & x_5, x_6, & x_7 & \geq 0.
\end{array}
$$

Como a variável auxiliar x_8 é desnecessária, ela não será usada.

Exemplo 2

Uma solução básica viável para o problema auxiliar é calculada fazendo $(x_5, x_6, x_7, x_4) = b = (3, 2, 5, 1)$.

A matriz base correspondente é a identidade.

Além disso, temos $c_B = (M, M, M, 0)$.

Exemplo 2

Calculamos os custos reduzidos para cada uma das variáveis originais x_i, dado por $c_i - c_B^T A_i$, e montamos o tableau inicial:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	-10M	1	-8M+1	-18M+1	0	0	0	0
$x_5 =$	3	1	2	3	0	1	0	0
$x_6 =$	2	-1	2	6	0	0	1	0
$x_7 =$	5	0	4	9	0	0	0	1
$x_4 =$	1	0	0	3	1	0	0	0

Exemplo 2

Para M suficientemente grande, os custos reduzidos das variáveis x_2 e x_3 são negativos.

Escolhemos a variável x_3 para entrar da base. Assim, ao calcular qual variável deve sair da base, podemos escolher entre x_6 e x_4. Escolhemos x_4. No tableau, o pivô está destacado:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	-10M	1	-8M+1	-18M+1	0	0	0	0
$x_5 =$	3	1	2	3	0	1	0	0
$x_6 =$	2	-1	2	6	0	0	1	0
$x_7 =$	5	0	4	9	0	0	0	1
$x_4 =$	1	0	0	**3**	1	0	0	0

Exemplo 2

Para anular o custo reduzido da variável x_3, precisamos multiplicar a linha pivô por $6M - 1/3$ e somá-la à linha 0.

O tableau atualizado é:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	-4M - 1/3	1	-8M+1	0	6M-1/3	0	0	0
$x_5 =$	2	1	2	0	-1	1	0	0
$x_6 =$	0	-1	2	0	-2	0	1	0
$x_7 =$	2	0	4	0	-3	0	0	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0

Exemplo 2

Para M suficientemente grande, o custo reduzido de x_2 é negativo, então esta variável é escolhida para entrar na base.

Neste caso, a variável x_6 é a única que pode sair da base. O pivô está destacado no tableau. Note que este é um pivô degenerado, com $\theta^* = 0$.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	-4M - 1/3	1	-8M+1	0	6M-1/3	0	0	0
$x_5 =$	2	1	2	0	-1	1	0	0
$x_6 =$	0	-1	<u>**2**</u>	0	-2	0	1	0
$x_7 =$	2	0	4	0	-3	0	0	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0

Exemplo 2

Ao atualizar o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	-4M - 1/3	-4M+3/2	0	0	-2M+2/3	0	4M-1/2	0
$x_5 =$	2	2	0	0	1	1	-1	0
$x_2 =$	0	-1/2	1	0	-1	0	1/2	0
$x_7 =$	2	2	0	0	1	0	-2	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0

Exemplo 2

Dentre as possíveis variáveis para entrar na base (x_1 e x_4), escolhemos x_1.

Para sair da base, temos duas possibilidades: x_5 e x_7. Escolhemos x_5. O pivô está destacado no tableau:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	-4M - 1/3	-4M+3/2	0	0	-2M+2/3	0	4M-1/2	0
$x_5 =$	2	$\underline{\mathbf{2}}$	0	0	1	1	-1	0
$x_2 =$	0	-1/2	1	0	-1	0	1/2	0
$x_7 =$	2	2	0	0	1	0	-2	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0

Exemplo 2

Atualizando o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	-11/6	0	0	0	-1/12	2M-3/4	2M+1/4	0
$x_1 =$	1	1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0
$x_2 =$	1/2	0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0
$x_7 =$	0	0	0	0	0	-1	-1	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0

Exemplo 2

Escolhemos agora a variável x_4 para entrar na base e variável x_3 para entrar.

No tableau, o pivô está destacado:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	-11/6	0	0	0	-1/12	2M-3/4	2M+1/4	0
$x_1 =$	1	1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0
$x_2 =$	1/2	0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0
$x_7 =$	0	0	0	0	0	-1	-1	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	<u>**1/3**</u>	0	0	0

Exemplo 2

Atualizando o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	-7/4	0	0	1/4	0	2M-3/4	2M+1/4	0
$x_1 =$	1/2	1	0	-3/2	0	1/2	-1/2	0
$x_2 =$	5/4	0	1	9/4	0	1/4	1/4	0
$x_7 =$	0	0	0	0	0	-1	-1	1
$x_4 =$	1	0	0	3	1	0	0	0

Para M suficientemente grande, todos os custos reduzidos são não-negativos e temos a solução ótima para o problema auxiliar.

Além disso, todas as variáveis artificiais (x_5, x_6 e x_7) valem 0, o que significa que temos a solução ótima para o problema original.