Método de Newton

Marina Andretta

ICMC-USP

13 de setembro de 2010

Método de Newton

O método de Newton para resolução de problemas de minimização irrestrita é um método de busca linear que usa a direção

$$\boxed{p_k = -(\nabla^2 f_k)^{-1} \nabla f_k.} \tag{1}$$

Note que, neste caso,

$$\boxed{p_k^T \nabla f_k = -\nabla f_k^T (\nabla^2 f_k)^{-1} \nabla f_k.}$$

Ou seja, se a Hessiana $\nabla^2 f_k$ for definida positiva, p_k é uma direção de descida.

Além disso, se as matrizes $\nabla^2 f_k$ têm número de condição uniformemente limitado, ou seja, existe uma constante M tal que

$$\boxed{\|\nabla^2 f_k\| \|\nabla^2 f_k^{-1}\| \leq M, \quad \forall k,}$$

vale que

$$\boxed{\cos\theta_k \geq 1/M.}$$

Usando a condição de Zoutendijk, temos que

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \|\nabla f_k\| = 0.}$$

Método de Newton

Portanto, o método de Newton produz uma sequência de gradientes que converge para zero, dado que as Hessianas $\nabla^2 f_k$ sejam definidas positivas com número de condição limitado uniformemente e que o método use uma busca linear que satisfaça as condições de Wolfe.

Pode-se mostrar também que a sequência gerada pelo método de Newton converge quando o tamanho de passo é calculado usando *backtracking* e satisfaz a condição de Armijo.

Ordem de convergência (local)

Como a matriz Hessiana $\nabla^2 f_k$ pode não ser definida positiva, a direção p_k pode não ser de descida. Futuramente serão discutidas técnicas para contornar este problema.

Vejamos agora apenas propriedades da ordem de convergência local do método de Newton. Sabemos que, para todo ponto x numa vizinhança da solução x^* que tem $\nabla^2 f(x^*)$ definida positiva, $\nabla^2 f(x)$ também é definida positiva.

Para esta vizinhança, o método de Newton está bem definido e converge quadraticamente dado que os tamanhos de passo α_k sejam, a partir de uma certa iteração, sempre 1.

Ordem de convergência (local)

Teorema 1: *Suponha que $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tenha segunda derivada contínua e que a Hessiana $\nabla^2 f(x)$ seja Lipschitz contínua em uma vizinhança da solução x^*, na qual as condições suficientes de segunda ordem são satisfeitas. Considere a iteração da forma $x_{k+1} = x_k + p_k$ com $p_k = -\nabla^2 f_k^{-1} \nabla f_k$.*
Então,

- *se o ponto inicial x_0 está suficientemente próximo de x^*, a sequência de iterandos converge a x^*;*
- *a ordem de convergência de $\{x_k\}$ é quadrática; e*
- *a sequência da norma dos gradientes $\{\|\nabla f_k\|\}$ converge quadraticamente para 0.*

Ordem de convergência (local)

Se o método usa uma busca linear que busca satisfazer as condições de Wolfe e sempre tenta o tamanho unitário, o teorema a seguir garante que este tamanho de passo sempre será aceito a partir de uma certa iteração (já que o limite (2) sempre vale quando a direção p_k é calculada pelo método de Newton).

Ordem de convergência (local)

Teorema 2: *Suponha que $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tenha terceira derivada contínua. Considere uma iteração da forma $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, onde p_k é uma direção de descida e α_k satisfaz as condições de Wolfe com $c_1 \leq 0.5$. Se a sequência $\{x_k\}$ converge a um ponto x^* tal que $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva e se a direção de busca satisfaz*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|\nabla f_k + \nabla^2 f_k p_k\|}{\|p_k\|} = 0, \tag{2}$$

então:

1. *o tamanho de passo $\alpha_k = 1$ é admissível para todo k maior do que um certo índice k_0; e*
2. *se $\alpha_k = 1$ para todo $k > k_0$, $\{x_k\}$ converge a x^* superlinearmente.*