Métodos para resolver problemas de otimização restrita

Marina Andretta

ICMC-USP

3 de novembro de 2014

Baseado no livro Numerical Optimization, de J. Nocedal e S. J. Wright.

Problema restrito

Estamos interessados em resolver o seguinte problema:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & f(x) & \\ \text{Sujeita a} & c_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E}, \\ & c_i(x) \geq 0, & i \in \mathcal{I}, \end{array}} \tag{1}$$

onde

- $x \in \boldsymbol{R}^n$,
- $f, c_i : \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$ funções suaves,
- $\mathcal{E}$ e $\mathcal{I}$ conjuntos de índices das restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente.

Problema restrito

Há vários métodos que podem ser usados para resolver problemas de programação não-linear gerais (1).

Destacamos os seguintes:

- Métodos de penalidades;
- Métodos de barreira;
- Métodos de Lagrangiano Aumentado;
- Métodos de programação quadrática sequencial.

Métodos de penalidade

Ao combinar a função objetivo e as restrições em uma função de penalidade, podemos resolver o problema original (1) resolvendo uma sequência de problemas irrestritos.

Por exemplo, se o problema (1) possui apenas restrições de igualdade, podemos definir uma função de penalidade quadrática como

$$\boxed{f(x) + \frac{1}{2\rho} \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i^2(x).} \tag{2}$$

Métodos de penalidade

O parâmetro $\rho > 0$ é chamado de parâmetro de penalidade.

Minimizamos, então, uma sequência de funções do tipo (2), com valores crescentes de ρ, até que a solução do problema original com precisão suficiente seja encontrada.

Se usamos uma função de penalidade exata, pode ser possível resolver o problema original (1) resolvendo apenas um problema de minimização irrestrita.

Para problemas com apenas restrições de igualdade, uma função de penalidade exata é dada por

$$\boxed{f(x) + \frac{1}{\rho} \sum_{i \in \mathcal{E}} |c_i(x)|,}$$

para uma escolha de $\rho > 0$ suficientemente pequeno.

No entanto, funções de penalidade exata geralmente não são diferenciáveis.

Portanto, para resolver problemas de minimização deste tipo de função é necessário resolver uma sequência de subproblemas.

Métodos de barreira

Em métodos de barreira, somamos termos à função objetivo que são insignificantes quando x está no interior da região viável mas se aproximam de infinito quando o ponto se aproxima da borda.

Por exemplo, para um problema (1) apenas com restrições de desigualdade, a função de barreira logarítmica tem a forma

$$\boxed{f(x) - \rho \sum_{i \in \mathcal{I}} \log c_i(x).} \tag{3}$$

O parâmetro $\rho > 0$ é chamado de parâmetro de barreira

Pode-se mostrar que os minimizadores desta função se aproximam dos minimizadores do problema original quando ρ se aproxima de zero.

Mais uma vez, a estratégia usual é encontrar minimizadores aproximados para a função barreira (3), usando uma sequência de valores decrescentes de ρ.

Métodos de Lagrangianos aumentados

Em métodos de Lagrangianos aumentados, definimos uma função que combina as propriedades da função Lagrangiana com a função de penalização quadrática (2).

A função de Lagrangiano aumentado para problemas (1) com apenas restrições de igualdade é dada por

$$\boxed{\mathcal{L}_A(x, \lambda, \rho) = f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i c_i(x) + \frac{1}{2\rho} \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i^2(x).} \quad (4)$$

Métodos de Lagrangianos aumentados

Métodos de Lagrangianos aumentados funcionam da seguinte maneira:

1. A cada iteração, os valores de λ e ρ são fixados.
2. Minimiza-se aproximadamente a função de Lagrangiano aumentado (4).
3. Usando o minimizador encontrado, atualiza-se o valor de λ. O valor de ρ pode ser diminuido.
4. Repete-se este procedimento até que a solução para o problema original seja encontrada.

A ideia de métodos de programação quadrática sequencial é, a cada iteração, modelar o problema (1) como um subproblema quadrático. Encontra-se, então, a solução deste modelo, que é usada como direção de busca.

Mais especificamente, para problemas (1) com apenas restrições de igualdade, definimos a direção de busca p_k no iterando (x_k, λ_k) como a solução do subproblema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \frac{1}{2} p^T W_k p + \nabla f(x_k)^T p \\ \text{Sujeita a} & A_k p + c_k = 0. \end{array}$$

Métodos de programação quadrática sequencial

A função objetivo deste subproblema é uma aproximação da função Lagrangiana e as restrições são linearizações das restrições originais.

O novo iterando é calculado fazendo-se uma busca na direção p_k até que uma função de mérito apresente decréscimo.

Métodos de programação quadrática sequencial são muito eficientes na prática.

Eles tipicamente fazem um número menor de iteração ao custo de resolver subproblemas relativamente complicados a cada iteração.