Como modelar um problema de *nesting* com rotações livres

Marina Andretta

ICMC-USP

9 de agosto de 2018

Baseado no artigo Peralta, J., Andretta, M., and Oliveira, J. F. (2018). Solving irregular strip packing problems with free rotations using separation lines. https://arxiv.org/abs/1707.07177.

O problema

Estamos interessados em resolver um problema conhecido como Problema de Empacotamento de Itens Irregulares em Faixa (ou Problema de *Nesting*) em que os itens podem rotacionar livremente.

O problema consiste em alocar itens em um recipiente retangular que tem a altura fixa e o comprimento considerado “infinito”.

Os polígonos não podem se sobrepor e devem estar inteiramente contidos no recipiente. Eles podem ser alocados no recipiente em qualquer rotação.

O objetivo é que todos os itens sejam empacotados de forma que o comprimento do recipiente seja o menor possível.

O problema

Figura: Exemplo extraído de Bennell, J. A. and Oliveira, J. F. (2009). A tutorial in irregular shape packing problems. Journal of Operational Research Society, 60:93–105.

Representação dos itens

Os itens serão representados por polígonos irregulares (convexos ou não-convexos).

Para representar um polígono convexo P_i, com v_i vértices, vamos usar os próprios vértices.

As variáveis que representam P_i no nosso modelo serão apenas um ponto de referência $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ de P_i e seu ângulo de rotação θ_i.

Dados os valores destas variáveis, podemos definir todos os demais vértices de P_i (denotados (x_i^ℓ, y_i^ℓ), para $\ell = 1, ..., v_i$).

Para representar um polígono não-convexo P_i, iremos particioná-lo em polígonos convexos.

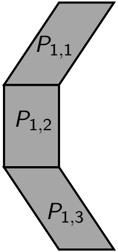

Figura: Partition of a nonconvex polygon into convex polygons.

As variáveis para representar P_i no nosso modelo também serão as coordenadas de um ponto de referência de P_i e seu ângulo de rotação.

Modelo matemático

Minimizar	comprimento do recipiente
sujeita a	restrições de contenção dos itens;
	restrições de não-sobreposição entre itens.

Modelo matemático

Minimizar	comprimento do recipiente
sujeita a	restrições de contenção dos itens;
	restrições de não-sobreposição entre itens.

As coordenadas do vértice ℓ de um dado polígono P_i podem ser escritas como

$$(\bar{x}_i^\ell, \bar{y}_i^\ell) = (x_i^\ell \cos\theta_i - y_i^\ell \sin\theta_i + \bar{x}_i, x_i^\ell \sin\theta_i + y_i^\ell \cos\theta_i + \bar{y}_i).$$

Função objetivo

O objetivo é minimizar o comprimento do recipiente, que tem largura fixa dada W.

Ou seja, queremos minimizar L, com

$$L = \max\{\bar{x}_i^\ell\}, \quad \ell = 1, ..., v_i, i = 1, ..., n, \tag{1}$$

para v_i o número de vértices do polígono P_i e n o número de polígonos.

Função objetivo

Podemos trocar o problema de

$$\text{Minimizar} \quad \max\{\bar{x}_i^\ell\}, \quad \text{para } \ell = 1, ..., v_i, \; i = 1, ..., n$$

pelo problema equivalente

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & L \\ \text{sujeita a} & \bar{x}_i^\ell \leq L, \quad \text{para } \ell = 1, ..., v_i, \; i = 1, ..., n. \end{array}$$

Restrições de contenção dos itens

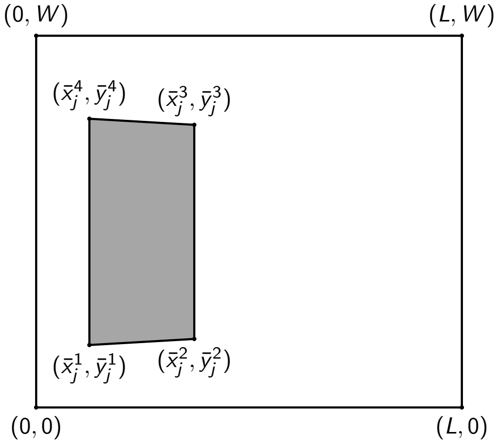

Figura: Polígono inteiramente contido no recipiente.

Restrições de contenção dos itens

Para garantir que um polígono P_i esteja inteiramente contido no recipiente, pedimos que

$$0 \leq \bar{x}_i^{\ell} \leq L,$$

and

$$0 \leq \bar{y}_i^{\ell} \leq W.$$

Para garantir que dois polígonos não se sobrepõem, usamos retas separadoras.

Dizemos que uma reta é separadora quando um polígono está todo de um lado da reta e o outro polígono está todo do outro lado da reta.

Restrições de não-sobreposição entre itens

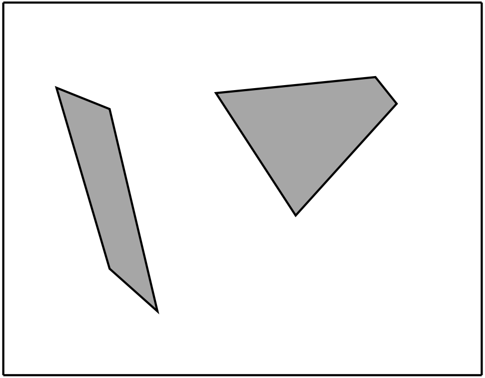

Figura: Reta separadora para dois polígonos convexos.

Restrições de não-sobreposição entre itens

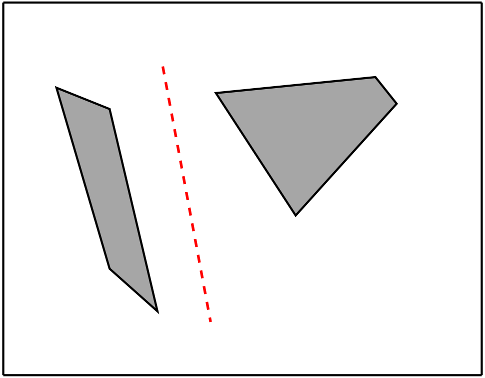

Figura: Reta separadora para dois polígonos convexos.

Restrições de não-sobreposição entre itens

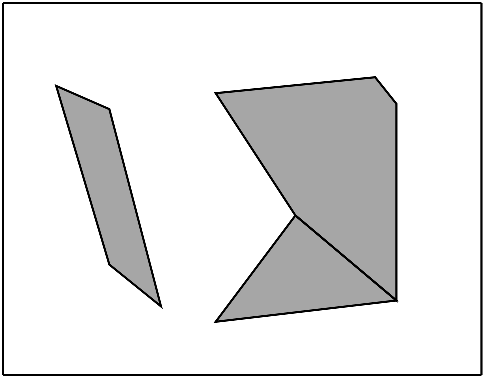

Figura: Reta separadora para um polígono convexo e outro não-convexos.

Restrições de não-sobreposição entre itens

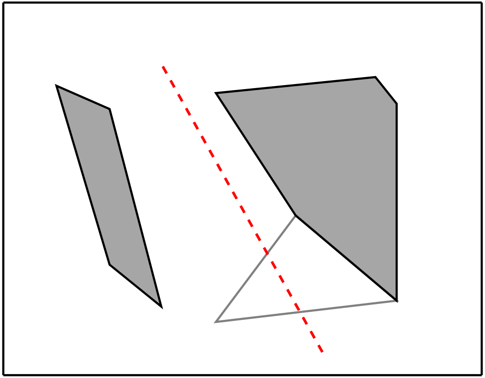

Figura: Reta separadora para um polígono convexo e outro não-convexos.

Restrições de não-sobreposição entre itens

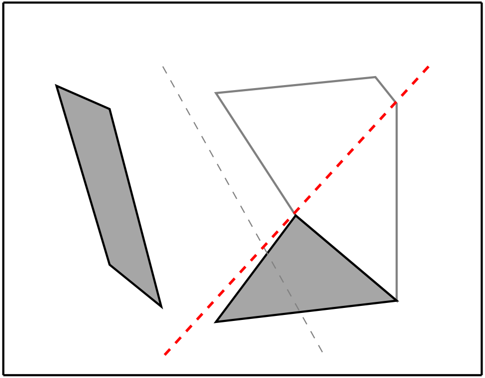

Figura: Reta separadora para um polígono convexo e outro não-convexos.

Restrições de não-sobreposição entre itens

Para garantir que temos uma reta separadora para dois polígonos convexos P_i e P_r, é suficiente garantir que todos os vértices de P_i estão de um lado da reta e todos os vértices de P_r estão do outro lado da reta.

Isso significa que a reta $y = c_{i,r}x + d_{i,r}$ separa os polígonos P_i e P_r se

$$\begin{cases} \bar{y}_i^\ell - c_{i,r}\bar{x}_i^\ell - d_{i,r} \leq 0, & \ell = 1, \dots, v_i, \\ \bar{y}_r^\ell - c_{i,r}\bar{x}_r^\ell - d_{i,r} \geq 0, & \ell = 1, \dots, v_r, \end{cases}$$

com v_i e v_r o número de vértices de P_i e P_r, respectivamente.

Exemplo

Figura: Instância Poly10a