Algoritmos de aproximação - Método primal-dual
Problema da transversal mínima

Marina Andretta

ICMC-USP

5 de novembro de 2015

Baseado no livro Uma introdução sucinta a Algoritmos de Aproximação, de M. H. Carvalho, M. R. Cerioli, R. Dahab, P. Feofiloff, C. G. Fernandes, C. E. Ferreira, K. S. Guimarães, F. K. Miyazawa, J. C. Piña Jr., J. A. R. Soares e Y. Wakabayashi.

Problema da transversal mínima

Veremos agora como aplicar o método primal-dual para obter um algoritmo de aproximação para o problema da transversal mínima.

Seja $\mathcal{S}$ uma coleção finita de subconjuntos de um conjunto finito E.

Um subconjunto T de E é uma transversal de $\mathcal{S}$ se $T \cap S$ é não-vazio para cada S em $\mathcal{S}$.

Problema da transversal mínima

O problema da transversal mínima (*hitting set problem*) consiste no seguinte:

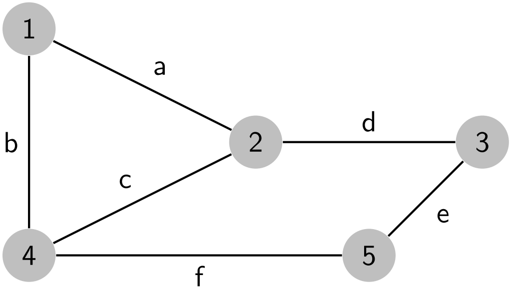
Problema $\textsc{MinTC}(E, \mathcal{S}, c)$: Dados um conjunto finito E, uma coleção finita $\mathcal{S}$ de subconjuntos de E e um custo c_e em $\mathbb{Q}_{\geq}$ para cada e em E, encontrar uma transversal T de $\mathcal{S}$ que minimize $c(T)$.

Às vezes, dizemos que $c(T)$ é o custo da transversal T. Com isso, o problema consiste em encontrar uma transversal de $\mathcal{S}$ de custo mínimo.

Diversos problemas combinatórios são casos particulares do $\textsc{MinTC}$, como o do caminho mínimo, da árvore geradora mínima e do corte mínimo.

Exemplo

Considere o grafo G dado na figura.



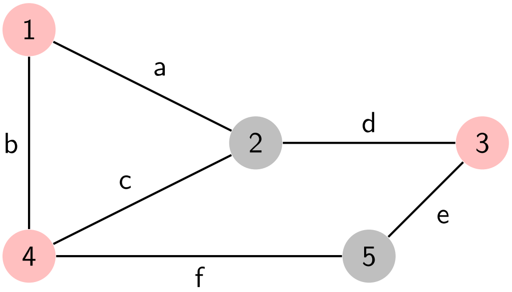
Definimos E e $\mathcal{S}$ como os conjuntos de vértices e arestas de G, ou seja, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{S} = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$.

Exemplo

Definimos o custo $c_e = 1$ para elementos $e \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $c_5 = 5$.

Neste caso, o problema de encontrar uma transversal mínima T de $\mathcal{S}$ é equivalente a encontrar uma cobertura mínima de vértices de G.

Uma transversal mínima é $T = \{1, 3, 4\}$, com custo $c(T) = 3$.



Programa primal

O seguinte programa linear é uma relaxação de $\textsc{MinTC}(E, \mathcal{S}, c)$: encontrar um vetor x indexado por E que

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & cx & \\ \text{sob as restrições} & x(S) \geq 1, & \text{para cada } S \text{ em } \mathcal{S}, \\ & x_e \geq 0, & \text{para cada } e \text{ em } E. \end{array} \tag{1}$$

Note que o vetor característico x de qualquer transversal T é um vetor viável de (1) de custo $c(T)$.

Programa dual

O correspondente programa dual consiste em encontrar um vetor y indexado por $\mathcal{S}$ que

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & y(\mathcal{S}) & \\ \text{sob as restrições} & \sum_{S : e \in S} y_S \leq c_e, & \text{para cada } e \text{ em } E, \\ & y_S \geq 0, & \text{para cada } S \text{ em } \mathcal{S}. \end{array} \tag{2}$$

Note que o vetor nulo é viável em (2).

Exemplo

Para o exemplo apresentado, temos que o programa linear primal é dado por:

$$
\begin{array}{lr}
\text{minimizar} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \\
\text{sob as restrições} & x_1 + x_2 \geq 1, \\
& x_1 + x_4 \geq 1, \\
& x_2 + x_4 \geq 1, \\
& x_2 + x_3 \geq 1, \\
& x_3 + x_5 \geq 1, \\
& x_4 + x_5 \geq 1, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{array}
$$

Exemplo

E o programa linear dual é dado por:

$$
\begin{array}{lr}
\text{maximizar} & y_a + y_b + y_c + y_d + y_e + y_f \\
\text{sob as restrições} & y_a + y_b \leq 1, \\
 & y_a + y_c + y_d \leq 1, \\
 & y_d + y_e \leq 1, \\
 & y_b + y_c + y_f \leq 1, \\
 & y_e + y_f \leq 5, \\
 & y_a, y_b, y_c, y_d, y_e, y_f \geq 0.
\end{array}
$$

Aproximação primal-dual

Tome $\beta := \max_{S \in \mathcal{S}} |S|$ e $\alpha = 1$. Seja y uma solução viável do problema dual (2).

Sejam ainda

$$I(y) := \{S \in \mathcal{S} : y_S = 0\} \text{ e } J(y) := \{e \in E : \sum_{S : e \in S} y_S \geq c_e\}.$$

O problema restrito aproximado relativo a y associado ao problema (1), consiste em encontrar um vetor x indexado por E tal que

$$\begin{array}{rcll} x(S) & \geq & 1, & \text{para cada } S \text{ em } \mathcal{S}, \\ x(S) & \leq & \beta, & \text{para cada } S \text{ em } \mathcal{S} \setminus I(y), \\ x_e & \geq & 0, & \text{para cada } e \text{ em } J(y), \\ x_e & = & 0, & \text{para cada } e \text{ em } E \setminus J(y). \end{array}$$

Como $x_e = 0$ para todo e em $E \setminus J(y)$, podemos trocar S por $J(y) \cap S$ nas duas primeiras desigualdades.

Assim, esse problema pode ser reescrito como

$$
\begin{array}{rcll}
x(J(y) \cap S) & \geq & 1, & \text{para cada } S \text{ em } \mathcal{S}, \\
x(J(y) \cap S) & \leq & \beta, & \text{para cada } S \text{ em } \mathcal{S} \setminus I(y), \\
x_e & \geq & 0, & \text{para cada } e \text{ em } J(y), \\
x_e & = & 0, & \text{para cada } e \text{ em } E \setminus J(y).
\end{array}
\qquad (3)
$$

Se o vetor característico x de $J(y)$ é viável em (3), então $J(y)$ é uma transversal de $\mathcal{S}$.

Se $J(y)$ não é uma transversal é evidente que o sistema (3) é inviável.

Esta observação é suficiente para obter uma solução viável do seguinte problema restrito aproximado dual: encontrar um vetor y' indexado por $\mathcal{S}$ tal que

$$\begin{array}{rcll} y'(\mathcal{S}) & > & 0, & \\ \sum_{S:e\in S} y'_S & \leq & 0, & \text{para cada } e \text{ em } J(y), \\ y'_S & \geq & 0, & \text{para cada } S \text{ em } I(y). \end{array} \tag{4}$$

Se $J(y) \cap R$ é vazio para algum R, então o vetor característico y' de $\{R\}$ é uma solução de (4).

Algoritmo MinTC-BE

O algoritmo resultante da aplicação do método de aproximação primal-dual ao MinTC é devido a Bar-Yehuda e Even e foi originalmente concebido para o problema da cobertura mínima por vértices.

O algoritmo MinTC-BE recebe um conjunto finito E, uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos não-vazios de E e um custo c_e em $\mathbb{Q}_{\geq}$ para cada e em E e devolve uma transversal J de $\mathcal{S}$ tal que $c(J) \leq \beta opt(E, \mathcal{S}, c)$.

A descrição do algoritmo supõe que cada subconjunto de $\mathcal{S}$ não é vazio, e portanto o problema $\text{MinTC}(E, \mathcal{S}, c)$ é viável.

Algoritmo MinTC-BE

Algoritmo MinTC-BE$(E, \mathcal{S}, c)$:

faça $J \leftarrow \{e \in E : c_e = 0\}$;
para cada S em $\mathcal{S}$ faça $y_S \leftarrow 0$;
enquanto existe R em $\mathcal{S}$ tal que $J \cap R = \emptyset$, faça:
    seja y' o vetor característico de $\{R\}$;
    seja θ o maior número tal que
        $\sum_{S:e \in S}(y + \theta y')_S \leq c_e$ para cada elemento e de R;
    seja f um elemento de R tal que $\sum_{S:f \in S}(y + \theta y')_S = c_f$;
    faça $y \leftarrow y + \theta y'$;
    faça $J \leftarrow J \cup \{f\}$;
devolva J.

Exemplo

Vamos simular a execução do algoritmo MinTC-BE para a instância dada no exemplo. Lembre-se que, para esta instância, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{S} = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$ e $c_e = 1$ para $e \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $c_5 = 5$.

Após a execução das linhas 1 e 2 do algoritmo, temos $J = \emptyset$ e $y_a = y_b = y_c = y_d = y_e = y_f = 0$.

Tomando $R = \{1, 2\}$, temos que $J \cap R = \emptyset$.

Na linha 4, definimos $y'_a = 1$ e $y'_b = y'_c = y'_d = y'_e = y'_f = 0$.

Exemplo

Nas linhas 5 e 6, precisamos definir o maior θ tal que

$$y_a + \theta y'_a + y_b + \theta y'_b \leq 1$$

e

$$y_a + \theta y'_a + y_c + \theta y'_c + y_d + \theta y'_d \leq 1,$$

restrições correspondentes aos elementos de R.

Exemplo

Temos então que encontrar o maior θ que satisfaz

$$0 + \theta 1 + 0 + \theta 0 = \theta \leq 1$$

e

$$0 + \theta 1 + 0 + \theta 0 + 0 + \theta 0 = \theta \leq 1.$$

Ou seja, $\theta = 1$.

Exemplo

Como as restrições correspondentes aos elementos 1 e 2 são satisfeitas por igualdade para este valor de θ, vamos definir $f = 1$ na linha 7.

Na linha 8, definimos $y_a = 0 + \theta 1 = 1$ e, após a linha 9, $J = \{1\}$. Voltamos à linha 3 do algoritmo.

Tomando $R = \{2, 4\}$, temos que $J \cap R = \emptyset$.

Na linha 4, definimos $y'_c = 1$ e $y'_a = y'_b = y'_d = y'_e = y'_f = 0$.

Exemplo

Nas linhas 5 e 6, precisamos definir o maior θ tal que

$$y_a + \theta y'_a + y_c + \theta y'_c + y_d + \theta y'_d \leq 1,$$

e

$$y_b + \theta y'_b + y_c + \theta y'_c + y_f + \theta y'_f \leq 1,$$

restrições correspondentes aos elementos de R.

Exemplo

Temos então que encontrar o maior θ que satisfaz

$$1 + \theta 0 + 0 + \theta 1 + 0 + \theta 0 = 1 + \theta \leq 1$$

e

$$0 + \theta 0 + 0 + \theta 1 + 0 + \theta 0 = \theta \leq 1.$$

Ou seja, $\theta = 0$.

Exemplo

Como a restrição correspondente ao elemento 2 é satisfeita por igualdade para este valor de θ, vamos definir $f = 2$ na linha 7.

Na linha 8, mantemos os valores de y e, após a linha 9, $J = \{1, 2\}$. Voltamos à linha 3 do algoritmo.

Tomando $R = \{3, 5\}$, temos que $J \cap R = \emptyset$.

Na linha 4, definimos $y'_e = 1$ e $y'_a = y'_b = y'_c = y'_d = y'_f = 0$.

Exemplo

Nas linhas 5 e 6, precisamos definir o maior θ tal que

$$y_d + \theta y'_d + y_e + \theta y'_e \leq 1,$$

e

$$y_e + \theta y'_e + y_f + \theta y'_f \leq 5,$$

restrições correspondentes aos elementos de R.

Exemplo

Temos então que encontrar o maior θ que satisfaz

$$0 + \theta 0 + 0 + \theta 1 = \theta \leq 1$$

e

$$0 + \theta 1 + 0 + \theta 0 = \theta \leq 5.$$

Ou seja, $\theta = 1$.

Exemplo

Como a restrição correspondente ao elemento 3 é satisfeita por igualdade para este valor de θ, vamos definir $f = 3$ na linha 7.

Na linha 8, atualizamos $y_e = 0 + \theta 1 = 1$ e, após a linha 9, $J = \{1, 2, 3\}$. Voltamos à linha 3 do algoritmo.

Tomando $R = \{4, 5\}$, temos que $J \cap R = \emptyset$.

Na linha 4, definimos $y'_f = 1$ e $y'_a = y'_b = y'_c = y'_d = y'_e = 0$.

Exemplo

Nas linhas 5 e 6, precisamos definir o maior θ tal que

$$y_b + \theta y'_b + y_c + \theta y'_c + y_f + \theta y'_f \leq 1,$$

e

$$y_e + \theta y'_e + y_f + \theta y'_f \leq 5,$$

restrições correspondentes aos elementos de R.

Exemplo

Temos então que encontrar o maior θ que satisfaz

$$0 + \theta 0 + 0 + \theta 0 + 0 + \theta 1 = \theta \leq 1$$

e

$$1 + \theta 0 + 0 + \theta 1 = 1 + \theta \leq 5.$$

Ou seja, $\theta = 1$.

Exemplo

Como a restrição correspondente ao elemento 4 é satisfeita por igualdade para este valor de θ, vamos definir $f = 4$ na linha 7.

Na linha 8, atualizamos $y_f = 0 + \theta 1 = 1$ e, após a linha 9, $J = \{1, 2, 3, 4\}$. Voltamos à linha 3 do algoritmo.

Como não há mais nenhum subconjunto R de $\mathcal{S}$ tal que $R \cap J = \emptyset$, o algoritmo devolve $J = \{1, 2, 3, 4\}$ como uma transversal, que tem custo $c(T) = 4$.

Algoritmo $\textsc{MinTC-BE}$

Teorema: O algoritmo $\textsc{MinTC-BE}$ é uma β-aproximação polinomial para o $\textsc{MinTC}(E, \mathcal{S}, c)$, com $\beta := \max_{S \in \mathcal{S}} |S|$.

Demonstração: Durante a execução do algoritmo, y é uma solução viável do programa linear dual (2).

É claro que o conjunto J devolvido pelo algoritmo é uma transversal de $\mathcal{S}$.

Além disso, pela escolha de β, é claro que $|J \cap S| \leq \beta$ para cada S em $\mathcal{S}$.

Logo, se x é o vetor característico de J, temos

$$c(J) = cx.$$

Pelo lema das folgas aproximadas,

$$c(J) = cx \leq \beta yb.$$

Seja $\hat{x}$ uma solução ótima de (1). Pelo teorema fraco da dualidade temos

$$c(J) \leq \beta yb \leq \beta c\hat{x} \leq \beta opt(E, \mathcal{S}, c).$$

O valor de $|J|$ cresce a cada execução da linha 9. Assim, o número de execuções das linhas 3 a 9 do algoritmo é no máximo $|E|$.

Ademais, a execução de cada linha consome tempo $O(|E||\mathcal{S}|)$.

Algoritmo MinTC-BE

A transversal J devolvida pelo algoritmo pode não ser minimal.

É possível que exista uma transversal propriamente contida em J de custo menor que $c(J)$.

Um pós-processamento simples pode extrair de J uma transversal minimal.

Apesar de útil do ponto de vista prático, este pós-processamento mas não resulta em uma melhor razão de aproximação para o algoritmo MinTC-BE.