Algoritmos de aproximação - Método primal-dual

Marina Andretta

ICMC-USP

28 de outubro de 2015

Baseado no livro Uma introdução sucinta a Algoritmos de Aproximação, de M. H. Carvalho, M. R. Cerioli, R. Dahab, P. Feofiloff, C. G. Fernandes, C. E. Ferreira, K. S. Guimarães, F. K. Miyazawa, J. C. Piña Jr., J. A. R. Soares e Y. Wakabayashi.

Introdução

Veremos o método primal-dual clássico e uma generalização dele para ser usada no projeto de algoritmos de aproximação: o método de aproximação primal-dual.

Usando as condições de folgas complementares, o método primal-dual reduz um problema de programação linear a uma sequência de problemas de viabilidade, potencialmente mais simples.

Introdução

Nas aplicações do método em otimização combinatória, esses problemas de viabilidade são muitas vezes outros problemas de otimização combinatória para os quais são conhecidos algoritmos eficientes (muitas vezes puramente combinatórios, ou seja, que não usam explicitamente algum algoritmos de programação linear).

Veremos adiante os algoritmos obtidos da aplicação do método de aproximação primal-dual ao problema da transversal mínima e ao problema da floresta de Steiner.

Problema primal

Sejam M e N os conjuntos de índices de linhas e colunas de uma matriz A.

Sejam b um vetor indexado por M e c um vetor indexado por N.

Considere o seguinte problema de programação linear, que será denotado por $P(A, b, c)$: encontrar um vetor x indexado por N que

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && cx && \\ &\text{sob as restrições} && (Ax)_i \geq b_i, && \text{para cada } i \text{ em } M, \\ & && x_j \geq 0, && \text{para cada } j \text{ em } N. \end{aligned} \tag{1}$$

Problema dual

O conjunto de soluções viáveis do problema $P(A, b, c)$ será denotado por $X(A, b)$.

O problema $P(A, b, c)$ é viável se e somente se $X(A, b)$ não é vazio.

O dual do problema $P(A, b, c)$, que será denotado por $D(A, c, b)$, consiste em encontrar um vetor y indexado por M que

$$\begin{array}{lrl} \text{maximize} & yb & \\ \text{sob as restrições} & (yA)_j \leq c_j, & \text{para cada } j \text{ em } N, \\ & y_i \geq 0, & \text{para cada } i \text{ em } M. \end{array} \tag{2}$$

Problema dual

O conjunto de soluções viáveis de $D(A, c, b)$ será denotado por $Y(A, c)$.

O problema $D(A, c, b)$ é viável se e somente se $Y(A, c)$ não é vazio.

Dizemos que $D(A, c, b)$ é o programa dual e $P(A, b, c)$ é o programa primal.

Folgas complementares

Dois vetores x e y, indexados por M e N respectivamente, têm folgas complementares se, para cada índice j em N, tem-se que

$$x_j = 0 \;\text{ ou }\; (yA)_j = c_j$$

e, para cada índice i em M, tem-se que

$$y_i = 0 \;\text{ ou }\; (Ax)_i = b_i.$$

O lema das folgas complementares afirma que, para todo x em $X(A, b)$ e todo y em $Y(A, c)$, tem-se $cx = yb$ se e somente se as folgas de x e y são complementares.

Método primal-dual clássico

A idéia geral do método primal-dual é a seguinte.

O método é iterativo e no início de cada iteração tem-se um vetor y viável no programa dual.

Cada iteração consiste em procurar um vetor x viável no programa primal que tenha folgas complementares às de y.

- Se um tal vetor x é encontrado, o método pára, pois x e y são soluções ótimas dos programas primal e dual, respectivamente.
- Se um tal vetor x não é encontrado, o método modifica y para obter um novo vetor z viável no programa dual e começa uma nova iteração com z no papel de y.

Método primal-dual clássico

O método primal-dual recebe um sistema (A, b, c) tal que $Y(A, c)$ não é vazio e devolve:

1. vetores x em $X(A, b)$ e y em $Y(A, c)$ tais que $cx = yb$, ou
2. um vetor y' em $Y(A, 0)$ tal que $y'b > 0$.

Método primal-dual clássico

Cada iteração do método começa com um vetor y em $Y(A, c)$. No início da primeira iteração, y é um elemento qualquer de $Y(A, c)$.

Cada iteração consiste no seguinte: sejam

$$I(y) := \{i \in M : y_i = 0\} \text{ e } J(y) := \{j \in N : (yA)_j = c_j\}.$$

Considere o problema restrito primal a seguir, denotado por $RP(A, b, y)$: encontrar um vetor x indexado por N tal que

$$\begin{array}{rcll} (Ax)_i & \geq & b_i, & \text{para cada } i \text{ em } I(y), \\ (Ax)_i & = & b_i, & \text{para cada } i \text{ em } M \setminus I(y), \\ x_j & \geq & 0, & \text{para cada } j \text{ em } J(y), \\ x_j & = & 0, & \text{para cada } j \text{ em } N \setminus J(y). \end{array} \quad (3)$$

Método primal-dual clássico

Este é um problema de viabilidade: trata-se de encontrar x que satisfaz todas as restrições em (3).

Suponha que o problema $RP(A, b, y)$ é viável e seja x uma de suas soluções.

Este vetor x está em $X(A, b)$ e tem folgas complementares às de y. Portanto, $cx = yb$.

Nesta situação o método pára após devolver os vetores x e y que, de acordo com o teorema fraco da dualidade, são soluções ótimas dos problemas $P(A, b, c)$ e $D(A, c, b)$, respectivamente.

Método primal-dual clássico

Se o problema $RP(A, b, y)$ é inviável então, pelo lema de Farkas, o seguinte problema de viabilidade tem solução: encontrar um vetor y' indexado por M tal que

$$\begin{aligned} y'b &> 0, \\ (y'A)_j &\leq 0, \quad \text{para cada } j \text{ em } J(y), \\ y'_i &\geq 0, \quad \text{para cada } i \text{ em } I(y). \end{aligned} \tag{4}$$

Esse problema é chamado de problema restrito dual e será denotado por $RD(A, b, y)$.

Seja y' uma solução do problema $RD(A, b, y)$.

Se, para todo número positivo θ, o vetor $y + \theta y'$ está em $Y(A, c)$, então o programa linear $D(A, c, b)$ é ilimitado e o método pára após devolver y', vetor de inviabilidade para $P(A, b, c)$.

Caso contrário, o método começa uma nova iteração com $y + \theta y'$ no papel de y, com θ o maior número tal que $y + \theta y'$ está em $Y(A, c)$.

Método primal-dual clássico

Método PRIMAL-DUAL(A, b, c):

seja y um vetor em $Y(A, c)$;
enquanto $RP(A, b, y)$ não tem solução, faça:
    seja y' uma solução de $RD(A, b, y)$;
    se $y + \theta y' \in Y(A, c)$ para todo θ positivo,
        então devolva y';
        senão seja θ o maior número tal que $y + \theta y' \in Y(A, c)$;
            faça $y \leftarrow y + \theta y'$.
Seja x uma solução de $RP(A, b, y)$;
devolva x e y.

Método de aproximação primal-dual

O método de aproximação primal-dual é semelhante ao método clássico, com a diferença que o método de aproximação pára assim que encontra soluções viáveis dos problemas $P(A, b, c)$ e $D(A, c, b)$ suficientemente próximas das soluções ótimas.

Esta proximidade será medida através de folgas aproximadas.

Sejam α e β dois números tais que $0 < \alpha \leq 1 \leq \beta$.

Folgas aproximadas

Dizemos que x e y têm folgas α-aproximadas no primal se, para cada índice j em N, tem-se que

$$x_j = 0 \ \text{ou} \ (yA)_j \geq \alpha c_j.$$

Dizemos que x e y têm folgas β-aproximadas no dual se, para cada índice i em M, tem-se que

$$y_i = 0 \ \text{ou} \ (Ax)_i \leq \beta b_i.$$

O lema a seguir é uma generalização do lema das folgas complementares.

Lema das folgas aproximadas

Lema (das folgas aproximadas): Se os vetores não-negativos x e y satisfazem as condições de folgas α-aproximadas no primal e β-aproximadas no dual, então $\alpha cx \leq \beta yb$.

Demonstração: Temos que

$$\alpha cx = \sum_{j \in N} \alpha c_j x_j.$$

Em virtude das folgas aproximadas e como tanto x com y são não-negativos,

$$\alpha cx = \sum_{j \in N} \alpha c_j x_j \leq \sum_{j \in N} (yA)_j x_j = \sum_{i \in M} y_i (Ax)_i \leq \sum_{i \in M} y_i \beta b_i = \beta yb.$$

Método de aproximação primal-dual

Note que, para todo x em $X(A, b)$ e y em $Y(A, c)$ satisfazendo as condições de folgas α-aproximadas no primal e β-aproximadas no dual, temos que

$$cx \leq (\beta/\alpha)yb \leq (\beta/\alpha)c\hat{x} \text{ e}$$

$$yb \geq (\alpha/\beta)cx \geq (\alpha/\beta)\hat{y}b,$$

com $\hat{x}$ e $\hat{y}$ soluções ótimas de $P(A, b, c)$ e $D(A, c, b)$, respectivamente.

Método de aproximação primal-dual

O método de aproximação primal-dual recebe um sistema (A, b, c) tal que $Y(A, c)$ não é vazio e dois números α e β tais que $0 < \alpha \leq 1 \leq \beta$ e devolve:

1. vetores x em $X(A, b)$ e y em $Y(A, c)$ tais que $\alpha cx \leq \beta yb$ ou
2. um vetor y' em $Y(A, 0)$ tal que $y'b > 0$.

Método de aproximação primal-dual

Cada iteração do método começa com um vetor y em $Y(A, c)$. No início da primeira iteração, y é um elemento qualquer de $Y(A, c)$.

Cada iteração consiste no seguinte. Sejam

$$I(y) := \{i \in M : y_i = 0\} \text{ e } J(y, \alpha) := \{j \in N : (yA)_j \geq \alpha c_j\}.$$

Considere o seguinte problema restrito aproximado primal, denotado por $RAP(A, b, y, \alpha, \beta)$: encontrar um vetor x indexado por N tal que

$$\begin{array}{rcll} (Ax)_i & \geq & b_i, & \text{para cada } i \text{ em } M, \\ (Ax)_i & \leq & \beta b_i, & \text{para cada } i \text{ em } M \setminus I(y), \\ x_j & \geq & 0, & \text{para cada } j \text{ em } J(y, \alpha), \\ x_j & = & 0, & \text{para cada } j \text{ em } N \setminus J(y, \alpha). \end{array}$$

Método de aproximação primal-dual

Se o problema $RAP(A, b, y, \alpha, \beta)$ é viável, então, pelo lema das folgas aproximadas, x é um vetor em $X(A, b)$ tal que $\alpha cx \leq \beta yb$ e o método devolve x e y.

Caso contrário, pelo lema de Farkas, o seguinte problema restrito aproximado dual, denotado por $RAD(A, b, y, \alpha)$, é viável: encontrar um vetor y' indexado por M tal que

$$\begin{array}{rcll} y'b & > & 0, & \\ (y'A)_j & \leq & 0, & \text{para cada } j \text{ em } J(y, \alpha), \\ y'_i & \geq & 0, & \text{para cada } i \text{ em } I(y). \end{array}$$

Seja y' uma solução do problema $RAD(A, b, y, \alpha)$.

Se para todo número positivo θ tem-se que $y + \theta y'$ está em $Y(A, c)$, então o programa linear $D(A, c, b)$ é ilimitado e o método pára após devolver y', vetor de inviabilidade para $P(A, b, c)$.

Caso contrário, o método começa uma nova iteração com $y + \theta y'$ no papel de y, com θ o maior número tal que $y + \theta y'$ está em $Y(A, c)$.

Método de aproximação primal-dual

Método $\textsc{Aproximação-Primal-Dual}(A, b, c, \alpha, \beta)$:

seja y um vetor em $Y(A, c)$;
enquanto $RAP(A, b, y, \alpha, \beta)$ não tem solução, faça:
    seja y' uma solução de $RAD(A, b, y, \alpha)$;
    se $y + \theta y' \in Y(A, c)$ para todo θ positivo,
        então devolva y';
        senão seja θ o maior número tal que $y + \theta y' \in Y(A, c)$;
            faça $y \leftarrow y + \theta y'$.
Seja x uma solução de $RAP(A, b, y, \alpha, \beta)$;
devolva x e y.

Método de aproximação primal-dual

Suponha que o método pare após devolver os vetores x e y.

É fácil verificar que

- x está em $X(A, b)$,
- y está em $Y(A, c)$ e
- os vetores x e y têm folgas α-aproximadas no primal e β-aproximadas no dual.

Portanto, pelo lema das folgas aproximadas, temos que $\alpha cx \leq \beta yb$.

Método de aproximação primal-dual

Assim, o vetor y é um certificado da qualidade de x como solução viável de $P(A, b, c)$, já que

$$cx \leq (\beta/\alpha)yb \leq (\beta/\alpha)\hat{y}b = (\beta/\alpha)c\hat{x},$$

com $\hat{x}$ e $\hat{y}$ soluções ótimas de $P(A, b, c)$ e $D(A, c, b)$, respectivamente.

Da mesma forma, o vetor x certifica que

$$yb \geq (\alpha/\beta)\hat{y}b.$$