Modelagem e otimização

Marina Andretta

ICMC-USP

19 de fevereiro de 2019

Modelagem matemática

Uma maneira de tentar encontrar propriedades de um problema, ou de resolvê-los, é formulá-los matematicamente.

O processo de transformar um problema real em uma formulação matemática que o representa é chamado de modelagem matemática.

Na maioria das vezes, no processo de modelagem do problema, é necessário fazer simplificações, ou porque o problema não tem todos os dados conhecidos ou simplesmente para facilitar a resolução do modelo.

Modelagem matemática

Ao modelar matematicamente um problema, podemos ter restrições, objetivo, dinâmica... Cada característica diferente leva a áreas de estudos diferentes para poder encontrar uma solução para o problema modelado.

Nesta primeira parte do curso vamos nos concentrar no caso particular de otimização.

Otimização

Otimizar significa encontrar a melhor maneira de fazer algo, dada uma medida do que é ser "melhor".

Estamos sempre otimizando:

- quando fazemos compras, queremos minimizar o dinheiro gasto, ou maximizar a qualidade do que foi comprado;
- quando fazemos matrícula, queremos fazer o maior número possível de disciplinas, sem, no entanto, prejudicar nosso desempenho;
- quando organizamos as horas de estudo, queremos aprender o máximo possível, de preferência no menor tempo.

Modelagem matemática

Matematicamente falando, otimizar significa maximizar ou minimizar uma função sujeita a restrições a suas variáveis.

Usaremos a seguinte notação:

- x é um vetor de variáveis;
- f é a função objetivo, uma função de x que deve ser minimizada ou maximizada;
- g_i é uma restrição que o ponto x deve satisfazer. Ela é uma função de x.

Assim, podemos escrever problemas de otimização da seguinte maneira:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeita a} & g_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \\ & g_i(x) \geq 0, \quad i \in \mathcal{I} \end{array}} \tag{1}$$

com

- $x \in \boldsymbol{R}^n$, $f \in \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$, $g_i \in \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$,
- $\mathcal{E}$ e $\mathcal{I}$ são conjuntos de índices.

Exemplo de modelo

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{sujeita a} & x_1 - 0.3x_2 \leq 0, \\ & x_1 + x_3 \leq 2. \end{array}$$

Modelagem matemática

Dependendo da natureza da função objetivo e das restrições, temos modelos que podem ser resolvidos usando técnicas diferentes. Temos, por exemplo, Problemas de Programação Linear, Problemas de Programação Não-linear, Problemas de Programação Linear Inteira, entre outros.

Para modelar um problema de otimização, precisamos definir:

- quais são os valores dados (parâmetros);
- quais serão as variáveis;
- qual será a função objetivo;
- quais serão as restrições (dadas por equações ou inequações);
- qual será o domínio das variáveis.

Exemplo: problema de transporte

Uma empresa que produz açúcar tem uma fábrica em São Carlos e outra em Araraquara (F_1 e F_2) e 3 clientes espalhados pelo estado de São Paulo, que chamaremos de C_1, C_2 e C_3.

A fábrica de São Carlos produz (p_1) 50 toneladas de açúcar por semana, enquanto que a fábrica de Araraquara produz (p_2) 100 toneladas.

Cada cliente possui uma demanda d_j (em toneladas, por semana) por açúcar, dada pela tabela abaixo:

C_1	C_2	C_3
20	60	40

Exemplo: problema de transporte

O custo c_{ij}, em reais, de enviar uma tonelada de produto de cada fábrica i para cada cliente j é dado pela tabela abaixo:

	C_1	C_2	C_3
F_1	35	20	40
F_2	90	55	77

O problema é determinar quanto açúcar enviar, em uma semana, de cada fábrica para cada cliente de modo a satisfazer todas as restrições e minimizar o custo.

Exemplo: problema de transporte

Para modelar este problema matematicamente, vamos definir variáveis x_{ij} que terão como valor a quantidade de toneladas de açúcar enviadas, em uma semana, da fábrica F_i para um cliente C_j.

Exemplo: problema de transporte

Para modelar este problema matematicamente, vamos definir variáveis x_{ij} que terão como valor a quantidade de toneladas de açúcar enviadas, em uma semana, da fábrica F_i para um cliente C_j.

Com as variáveis definidas, podemos definir nossa função objetivo. Esta é uma função de $\boldsymbol{R}^6$ em $\boldsymbol{R}$ que, dados os valores das variáveis x_{ij}, devolve o custo.

Exemplo: problema de transporte

Para modelar este problema matematicamente, vamos definir variáveis x_{ij} que terão como valor a quantidade de toneladas de açúcar enviadas, em uma semana, da fábrica F_i para um cliente C_j.

Com as variáveis definidas, podemos definir nossa função objetivo. Esta é uma função de $\boldsymbol{R}^6$ em $\boldsymbol{R}$ que, dados os valores das variáveis x_{ij}, devolve o custo.

Usando os custos de transporte de cada fábrica para cada cliente, podemos definir a função objetivo como

$$f(x) = 35x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 90x_{21} + 55x_{22} + 77x_{23}.$$

Exemplo: problema de transporte

Para modelar este problema matematicamente, vamos definir variáveis x_{ij} que terão como valor a quantidade de toneladas de açúcar enviadas, em uma semana, da fábrica F_i para um cliente C_j.

Com as variáveis definidas, podemos definir nossa função objetivo. Esta é uma função de $\boldsymbol{R}^6$ em $\boldsymbol{R}$ que, dados os valores das variáveis x_{ij}, devolve o custo.

Usando os custos de transporte de cada fábrica para cada cliente, podemos definir a função objetivo como

$$f(x) = 35x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 90x_{21} + 55x_{22} + 77x_{23}.$$

No caso deste problema, desejamos minimizar a função objetivo.

Exemplo: problema de transporte

Agora precisamos definir quais são as restrições do nosso problema.

Teremos 3 grupos de restrições:

1. As restrições do primeiro grupo servirão para garantir que uma fábrica não envia mais produtos do que é capaz de produzir.
2. As restrições do segundo grupo irão garantir que as demandas de cada cliente serão atendidas.
3. As restrições do terceiro grupo irão garantir que a quantidade de produto enviada de uma fábrica a um cliente nunca é negativa.

Exemplo: problema de transporte

Para garantir que fábrica F_1 não envia mais produto do que é capaz de produzir (50 toneladas), temos a restrição

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 50.$$

Exemplo: problema de transporte

Para garantir que fábrica F_1 não envia mais produto do que é capaz de produzir (50 toneladas), temos a restrição

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 50.$$

Analogamente, para garantir que fábrica F_2 não envia mais produto do que é capaz de produzir (100 toneladas), temos a restrição

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 100.$$

Para garantir que o cliente C_1 receba a quantidade de produto desejada (20 toneladas), temos a restrição

$$x_{11} + x_{21} = 20.$$

Exemplo: problema de transporte

Para garantir que o cliente C_1 receba a quantidade de produto desejada (20 toneladas), temos a restrição

$$x_{11} + x_{21} = 20.$$

Analogamente, para garantir que os clientes C_2 e C_3 recebam as quantidades de produtos desejadas (60 e 40 toneladas, respectivamente), temos as restrições

$$x_{12} + x_{22} = 60,$$

$$x_{13} + x_{23} = 40.$$

Por fim, para garantir que as quantidades de produto enviadas de cada fábrica F_i para cada cliente C_j não seja menor que zero, temos as restrições

$$x_{11} \geq 0,$$
$$x_{12} \geq 0,$$
$$x_{13} \geq 0,$$
$$x_{21} \geq 0,$$
$$x_{22} \geq 0,$$
$$x_{23} \geq 0.$$

Exemplo: problema de transporte

Então, nosso modelo para este problema de transporte fica:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & 35x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 90x_{21} + 55x_{22} + 77x_{23} \\
\text{sujeita a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 50, \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 100, \\
& x_{11} + x_{21} = 20, \\
& x_{12} + x_{22} = 60, \\
& x_{13} + x_{23} = 40, \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0.
\end{array}
$$

Exemplo: problema de transporte

Para este modelo, a solução é

$$x_{11} = 20,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 30,$$

$$x_{21} = 0,\ x_{22} = 60,\ x_{23} = 10.$$

O custo total para enviar todas as toneladas necessárias de açúcar para os clientes será de 5970 reais.

Problema *versus* instância

Note que, no exemplo dado, temos definidos

- a quantidade n de fábricas F_i;
- a quantidade m de clientes C_j;
- os valores de p_i (produção de açúcar de cada fábrica F_i);
- os valores de d_j (demanda pelo produto de cada cliente C_j);
- os valores de c_{ij} (custo de transportar o produto da fábrica F_i para o cliente C_j).

Trocando os valores para estes parâmetros, temos instâncias diferentes para o problema de transporte.

Problema *versus* instância

Para o caso geral, podemos escrever o modelo para o problema de transporte da seguinte forma:

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimizar} & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{sujeita a} & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq p_i, & \text{para } i = 1, ..., n, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j, & \text{para } j = 1, ..., m, \\
& x_{ij} \geq 0, & \text{para } i = 1, ..., n \text{ e } j = 1, ..., m.
\end{array}
$$

Para encontrar uma solução para um modelo matemático, usamos algoritmos e métodos computacionais.

Em geral, algoritmos de otimização para problemas gerais são iterativos. Eles partem de um "chute" inicial dos valores das variáveis e geram uma sequência com valores aprimorados das variáveis até atingir uma solução.

A estratégia usada para ir de um iterando a outro é o que distingue um algoritmo de outro. A maioria das estratégias usa o valor da função objetivo f, o valor das restrições g e, possivelmente, a primeira e segunda derivadas dessas funções.

Algoritmos exatos *versus* heurísticos ou de aproximação

Quando um algoritmo se propõe a encontrar a solução ótima de um modelo (a menos de erros de arredondamento), e tem essa propriedade demonstrada, ele é dito exato.

Para encontrar a solução de um modelo, um algoritmo pode levar tempo computacional muito grande, inviabilizando sua utilização na prática. Neste caso, outros algoritmos podem ser usados que, no entanto, não garantem encontrar a solução ótima.

Algoritmos exatos *versus* heurísticos ou de aproximação

Algoritmos que garantem alguma distância máxima pré-definida entre a solução ótima e a solução obtida pelo algoritmo são chamados de algoritmos de aproximação

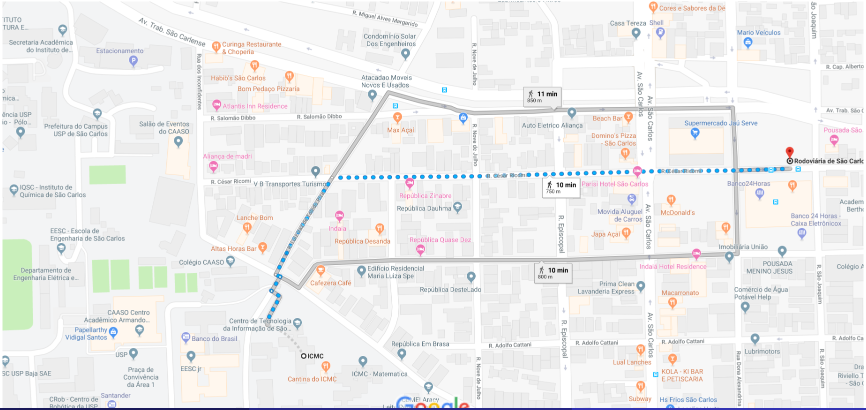
Algoritmos que não têm nenhuma garantia de qualidade a respeito da solução obtida são chamados de heurísticas. Em geral, apesar de nenhuma garantia, as soluções obtidas por estes algoritmos são de boa qualidade e obtidas em tempo computacional baixo.

Exercício - problema do caminho mínimo

Suponha que você esteja no ICMC e queira chegar na Rodoviária de São Carlos. Para isso, há vários caminhos possíveis.

2/18/2019 de ICMC a Rodoviária de São Carlos - Google Maps

Google Maps de ICMC a Rodoviária de São Carlos A pé 750 m, 10 min



Exercício - problema do caminho mínimo

1. Como você faria para escolher "na mão" o caminho mais rápido?

2. Como você modelaria este problema como um problema de otimização? Dica: tente simplificar seu mapa, usando apenas as informações importantes para resolver o seu problema.

3. O que você precisaria mudar no seu modelo caso quisesse encontrar o caminho mais rápido entre a Rodoviária de São Carlos e a Rodoviária Tietê, em São Paulo?