Interpolação polinomial: Polinômio de Lagrange

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

3 de setembro de 2012

Baseado no livro Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Considere, por exemplo, que temos uma tabela com anos e o número de habitantes de um país em cada um destes anos.

Podemos estar interessados em estimar qual será a população em um ano futuro, usando como base os dados da tabela.

Este processo é chamado de interpolação.

Aproximação de funções por polinômios

O que fazemos é aproximar uma função desconhecida (no caso do exemplo, a quantidade de habitantes em função do ano) por outra.

Uma classe de funções muito usada para aproximar outras funções desconhecidas é a de polinômios.

Primeiramente, é garantido que sempre é possível aproximar uma função contínua por um polinômio. Além disso, polinômios têm derivadas e integrais muito fáceis de serem calculadas.

A aproximação de funções por polinômios é chamada de interpolação polinomial.

Veremos agora como definir polinômios interpoladores a partir de pontos no plano onde estes polinômios devem passar.

O problema de encontrar um polinômio de grau um que passa pelos pontos distintos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é o mesmo de aproximar uma função f, para a qual $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$, por um polinômio interpolador de grau um.

Primeiramente, vamos definir as funções

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Depois, definimos o polinômio

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1).$$

Como

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1,$$

temos que

$$P(x_0) = 1f(x_0) + 0f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

e

$$P(x_1) = 0f(x_0) + 1f(x_1) = f(x_1) = y_1,$$

como gostaríamos.

P é a única reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

Para generalizar a idéia de interpolação linear (ou seja, aproximação de funções por uma reta), considere a construção de um polinômio de grau no máximo n que passe pelos $n+1$ pontos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n)).$$

Neste caso, precisamos construir uma função $L_{n,k}(x)$, para cada $k = 0, 1, ..., n$, para a qual vale que $L_{n,k}(x_k) = 1$ e $L_{n,k}(x_i) = 0$, se $i \neq k$.

Para que valha que $L_{n,k}(x_i) = 0$, se $i \neq k$, utilizamos o termo

$$(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)$$

no numerador de $L_{n,k}(x_i)$.

Para que valha que $L_{n,k}(x_k) = 1$, precisamos que o numerador e o denominador de $L_{n,k}(x)$ sejam iguais quando $x = x_k$. Ou seja,

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}.$$

Uma vez conhecidas as funções $L_{n,k}$, um polinômio interpolador é facilmente determinado.

Este polinômio é chamado de n-ésimo polinômio interpolador de Lagrange e é definido como descrito no Teorema 1.

Interpolação polinomial de Lagrange

Teorema 1: *Se* $x_0, x_1, ..., x_n$ *são* $n+1$ *números distintos e* f *é uma função cujos valores nestes números são dados, então existe um único polinômio* $P(x)$ *de grau no máximo* n *com*

$$f(x_k) = P(x_k), \quad para \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Este polinômio é dado por

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + ... + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x), \qquad (1)$$

onde, para cada $k = 0, 1, ..., n$,

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)} = \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

Interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Quando não houver dúvida quanto ao grau do polinômio, denotaremos $L_{n,k}(x)$ por $L_k(x)$.

Queremos determinar o segundo polinômio interpolador de Lagrange para a função $f(x) = \frac{1}{x}$, usando os pontos $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$ e $x_2 = 4$.

Para isto, o primeiro passo é determinar $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$.

Interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Usando a definição vista anteriormente, temos que

$$L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = (x-2.5)(x-4),$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = -\frac{(x-2)(x-4)}{0.75},$$

e

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{(x-2)(x-2.5)}{3}.$$

Interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Como

$$f(x_0) = f(2) = 0.5, \quad f(x_1) = f(2.5) = 0.4, \quad f(x_2) = f(4) = 0.25,$$

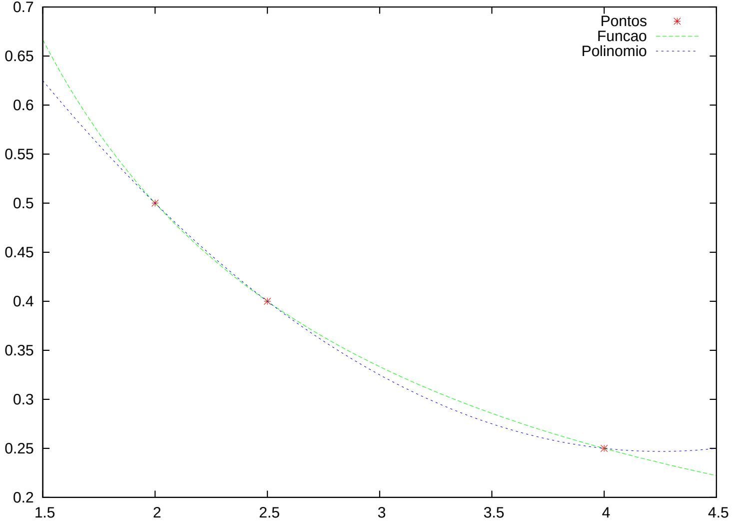
temos que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k) L_k(x) =$$

$$0.5(x-2.5)(x-4) - 0.4\frac{(x-2)(x-4)}{0.75} + 0.25\frac{(x-2)(x-2.5)}{3} =$$

$$0.05x^2 - 0.425x + 1.15.$$

Interpolação polinomial de Lagrange - exemplo



Interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Usando o polinômio P calculado, podemos estimar o valor da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em um ponto.

Uma aproximação de $f(3) = \frac{1}{3}$ é

$$f(3) \approx P(3) = 0.325.$$

Precisamos agora de uma estimativa para o erro cometido na aproximação de uma função f por um polinômio interpolador P.

Erro da interpolação polinomial de Lagrange

Teorema 2: *Suponha que* $x_0, x_1, ..., x_n$ *sejam números distintos no intervalo* $[a, b]$ *e que* $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$. *Então, para cada* $x \in [a, b]$, *existe um número* $\xi(x)$ *(geralmente conhecido) em* (a, b) *tal que*

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n),$$

onde $P(x)$ *é o polinômio interpolador (1).*

Erro da interpolação polinomial de Lagrange

Observe que a forma do erro para o polinômio de Lagrange é parecida com a fórmula do erro para o polinômio de Taylor.

O n-ésimo polinômio de Taylor em torno de x_0 concentra todas as informações conhecidas em x_0 e possui um termo de erro da forma

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Erro da interpolação polinomial de Lagrange

O n-ésimo polinômio de Lagrange utiliza informações dos números distintos $x_0, x_1, ..., x_n$.

Assim, no lugar do termo $(x - x_0)^{n+1}$, sua fórmula para o erro utiliza o produto dos $n + 1$ termos $(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$, ou seja,

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n).$$

Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Suponha que montemos uma tabela com valores da função $f(x) = e^x$, para $x \in [0, 1]$.

Suponha que o número de casas decimais usadas para cada valor de x seja $d \geq 8$ e que os valores de x estejam espaçados igualmente, com distância h (ou seja, $x_i = x_{i-1} + h$).

Qual deve ser o valor de h para que a interpolação linear (ou seja, primeiro polinômio interpolador de Lagrange) gere um erro absoluto de até 10^{-6}?

Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Considere $x_0, x_1, ...$ os números nos quais f será calculada.

Tome $x \in [0, 1]$ e j tal que $x_j \leq x \leq x_{j+1}$.

A equação do erro na interpolação linear é dada por

$$|f(x) - P(x)| = \left| \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x - x_j)(x - x_{j+1}) \right| = \frac{|f^{(2)}(\xi)|}{2} |(x - x_j)||(x - x_{j+1})|.$$

Como a distância entre dois pontos consecutivos x_i e x_{i+1} é h, temos que $x_j = jh$ e $x_{j+1} = (j+1)h$. Assim,

$$|f(x) - P(x)| = \frac{|f^{(2)}(\xi)|}{2} |(x - jh)(x - (j+1)h)|.$$

Logo,

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [0,1]} e^{\xi} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)| \leq$$

$$\frac{1}{2} e \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)|.$$

Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Considerando $g(x) = (x - jh)(x - (j+1)h)$, para $jh \leq x \leq (j+1)h$, podemos utilizar o Teorema do Valor Extremo para obter

$$\max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)| = \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |g(x)| = \left| g\left(\left(j + \frac{1}{2}\right) h\right)\right| = \frac{h^2}{4}.$$

Assim, o erro da interpolação linear será limitado por

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{eh^2}{8}.$$

Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Ou seja, h deve ser escolhido de forma que

$$\frac{eh^2}{8} \leq 10^{-6},$$

o que implica que

$$h < 1.72 \times 10^{-3}.$$

Como h é escolhido de forma que os pontos $x_i \in [0, 1]$ sejam igualmente espaçados, temos que $n = (1 - 0)/h$ deve ser um número inteiro. Uma escolha para o tamanho de passo seria $h = 0.001$.

Vejamos, agora, um exemplo em que a função a ser aproximada é desconhecida.

A tabela a seguir fornece os valores de uma função em vários pontos.

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Vamos comparar as aproximações de $f(1.5)$ obtida através de vários polinômios interpoladores de Lagrange.

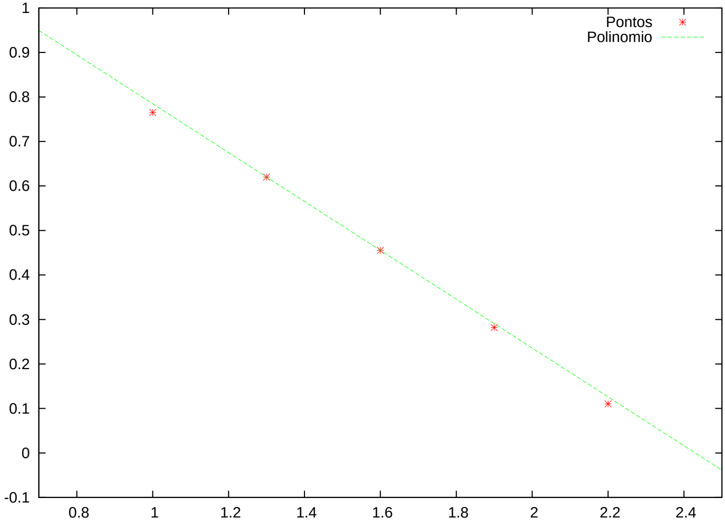
Como 1.5 está entre 1.3 e 1.6, o polinômio interpolador de grau um mais adequado é o que utiliza os pontos $x_0 = 1.3$ e $x_1 = 1.6$.

O valor deste polinômio interpolador de grau um, calculado em 1.5, é dado por

$$P_1(1.5) = \frac{(1.5 - 1.6)}{(1.3 - 1.6)} f(1.3) + \frac{(1.5 - 1.3)}{(1.6 - 1.3)} f(1.6) =$$

$$\frac{(1.5 - 1.6)}{(1.3 - 1.6)} 0.6200860 + \frac{(1.5 - 1.3)}{(1.6 - 1.3)} 0.4554022 = 0.5102968.$$

Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo



Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Para calcular um polinômio interpolador de grau dois e usá-lo para aproximar o valor de $f(1.5)$, temos duas boas opções.

Uma é utilizar os pontos $x_0 = 1.3$, $x_1 = 1.6$ e $x_2 = 1.9$, obtendo

$$P_2(1.5) = \frac{(1.5-1.6)(1.5-1.9)}{(1.3-1.6)(1.3-1.9)} f(1.3) + \frac{(1.5-1.3)(1.5-1.9)}{(1.6-1.3)(1.6-1.9)} f(1.6) +$$

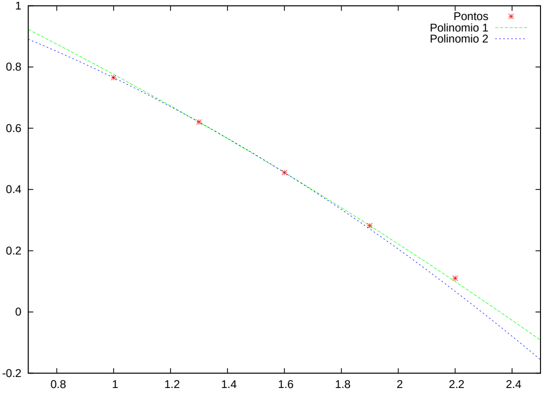
$$\frac{(1.5-1.3)(1.5-1.6)}{(1.9-1.3)(1.9-1.6)} f(1.9) =$$

$$\frac{(1.5-1.6)(1.5-1.9)}{(1.3-1.6)(1.3-1.9)} 0.6200860 + \frac{(1.5-1.3)(1.5-1.9)}{(1.6-1.3)(1.6-1.9)} 0.4554022 +$$

$$\frac{(1.5-1.3)(1.5-1.6)}{(1.9-1.3)(1.9-1.6)} 0.2818186 = 0.5112857.$$

Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

A outra é utilizar os pontos $x_0 = 1$, $x_1 = 1.3$ e $x_2 = 1.6$, obtendo $\hat{P}_2(1.5) = 0.5124715$.

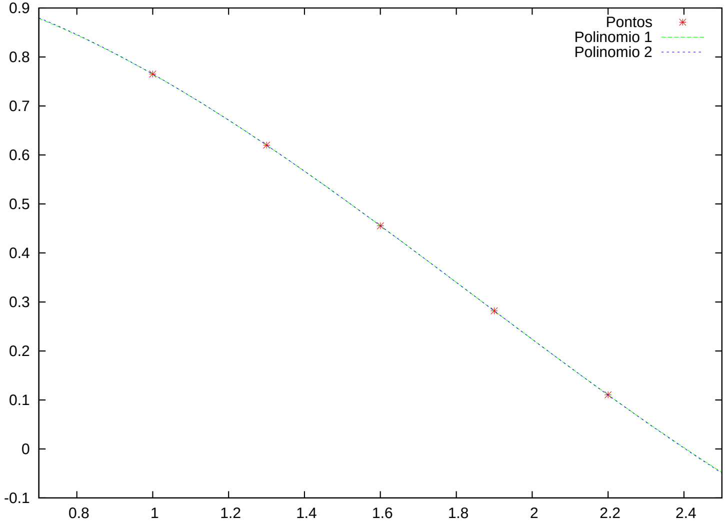


Para calcular um polinômio interpolador de grau três e usá-lo para aproximar o valor de $f(1.5)$, temos, também, duas boas opções.

Uma é utilizar os pontos $x_0 = 1.3$, $x_1 = 1.6$, $x_2 = 1.9$ e $x_3 = 2.2$, obtendo $P_3(1.5) = 0.5118302$.

A outra é utilizar os pontos $x_0 = 1$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$ e $x_3 = 1.9$, obtendo $\hat{P}_3(1.5) = 0.5118127$.

Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo



Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

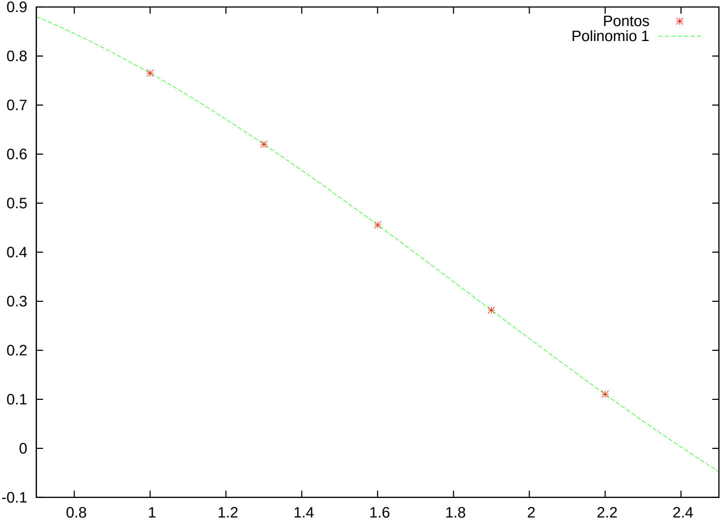
O polinômio interpolador de Lagrange de grau quatro utiliza todos os pontos da tabela e obtém a aproximação $P_4(1.5) = 0.51182$.

Como $P_3(1.5)$, $\hat{P}_3(1.5)$ e $P_4(1.5)$ coincidem com uma precisão de 2×10^{-5}, espera-se essa ordem de precisão para todas as aproximações.

Espera-se também que $P_4(1.5)$ seja a aproximação mais precisa, pois utiliza mais dados fornecidos.

A função que está sendo aproximada é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero, cujo valor em 1.5 é 0.5118277.

Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo



Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Portanto, as precisões verdadeiras obtidas são:

$$|P_1(1.5) - f(1.5)| \approx 1.53 \times 10^{-3}$$

$$|P_2(1.5) - f(1.5)| \approx 5.42 \times 10^{-4}$$

$$|\hat{P}_2(1.5) - f(1.5)| \approx 6.44 \times 10^{-4}$$

$$|P_3(1.5) - f(1.5)| \approx 2.5 \times 10^{-6}$$

$$|\hat{P}_3(1.5) - f(1.5)| \approx 1.5 \times 10^{-5}$$

$$|P_4(1.5) - f(1.5)| \approx 7.7 \times 10^{-6}$$

Apesar de $P_3(1.5)$ apresentar o menor erro de aproximação, sem conhecer o verdadeiro valor de $f(1.5)$, acreditaríamos que a melhor aproximação é dada por $P_4(1.5)$.

Neste caso, o termo de erro do polinômio interpolação de Lagrange não é conhecido, já que não dispomos nem da função f, nem de suas derivadas.

Em geral, quando calculamos o polinômio interpolador, de fato, não conhecemos a função verdadeira ou suas derivadas.

Esta é uma dificuldade prática com a interpolação polinomial de Lagrange: como o termo de erro é difícil de ser calculado, não é possível garantir uma precisão desejada para as aproximações obtidas.

A prática mais comum é calcular as aproximações fornecidas para diversos polinômio e, então, escolher a mais adequada (como feito no exemplo anterior).

O problema com esta abordagem é que, ao se calcular uma nova aproximação, usando um novo polinômio, nenhum calculo é aproveitado. Vejamos como isto pode ser contornado.

Definição: *Seja f uma função definida em $x_0, x_1, ..., x_n$ e suponha que $m_1, m_2, ..., m_k$ sejam k números inteiros distintos, com $0 \leq m_i \leq n$ para todo i. O polinômio de Lagrange que coincide com $f(x)$ nos k pontos $x_{m_1}, x_{m_2}, ..., x_{m_k}$ é denotado por $P_{m_1,m_2,...,m_k}(x)$.*

Por exemplo, se $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$ e $f(x) = e^x$, o polinômio $P_{1,2,4}(x)$ é aquele que coincide com x_1, x_2 e x_4. Ou seja,

$$P_{1,2,4}(x) = \frac{(x-3)(x-6)}{(2-3)(2-6)}e^2 + \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)}e^3 + \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)}e^6.$$

Teorema 3: *Seja f definida em $x_0, x_1, ..., x_k$ e sejam x_j e x_i dois números distintos neste conjunto. Então,*

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,...,j-1,j+1,...,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,...,i-1,i+1,...,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

descreve o k-ésimo polinômio de Lagrange que interpola f nos $k + 1$ pontos $x_0, x_1, ..., x_k$.

O Teorema 3 implica que os polinômios interpoladores podem ser gerados de maneira recursiva.

A tabela a seguir mostra como os cálculos podem ser feitos. Nesta tabela, cada coluna depende dos valores da coluna anterior.

x_0	$P_0 = Q_{0,0}$				
x_1	$P_1 = Q_{1,0}$	$P_{0,1} = Q_{1,1}$			
x_2	$P_2 = Q_{2,0}$	$P_{1,2} = Q_{2,1}$	$P_{0,1,2} = Q_{2,2}$		
x_3	$P_3 = Q_{3,0}$	$P_{2,3} = Q_{3,1}$	$P_{1,2,3} = Q_{3,2}$	$P_{0,1,2,3} = Q_{3,3}$	
x_4	$P_4 = Q_{4,0}$	$P_{3,4} = Q_{4,1}$	$P_{2,3,4} = Q_{4,2}$	$P_{1,2,3,4} = Q_{4,3}$	$P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,3}$

Este procedimento para calcular os polinômios interpoladores é chamado de Método de Neville.

Para evitar os subescritos mútiplos de P, denotaremos por $Q_{i,j}(x)$, $0 \leq j \leq i$, o polinômio interpolador de grau j nos $(j+1)$ números $x_{i-j}, x_{i-j+1}, ..., x_{i-1}, x_i$. Isto é,

$$Q_{i,j} = P_{i-j,i-j+1,...,i-1,i}.$$

Mais uma vez iremos aproximar o valor de $f(1.5)$ para uma função desconhecida que tem valores da função em alguns pontos dados na tabela a seguir.

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

Método de Neville - exemplo

Iremos utilizar o Método de Neville para calcular esta aproximação.

Como $x_0 = 1$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$, $x_3 = 1.9$ e $x_4 = 2.2$, os valores de $Q_{0,0} = f(1)$, $Q_{1,0} = f(1.3)$, $Q_{2,0} = f(1.6)$, $Q_{3,0} = f(1.9)$ e $Q_{4,0} = f(2.2)$ são os cinco polinômios de grau zero que aproximam $f(1.5)$.

Método de Neville - exemplo

Assim, temos a primeira coluna da tabela Q:

x_i	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$	$Q_{i,4}$
1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860				
1.6	0.4554022				
1.9	0.2818186				
2.2	0.1103623				

Método de Neville - exemplo

Para calcular a aproximação usando o primeiro polinômio de grau um, temos

$$Q_{1,1}(x) = \frac{(x - x_0)Q_{1,0} - (x - x_1)Q_{0,0}}{x_1 - x_0}.$$

$$Q_{1,1}(1.5) = \frac{(1.5 - x_0)Q_{1,0} - (1.5 - x_1)Q_{0,0}}{x_1 - x_0} =$$

$$\frac{(1.5 - 1)Q_{1,0} - (1.5 - 1.3)Q_{0,0}}{1.3 - 1} =$$

$$\frac{0.5Q_{1,0} - 0.2Q_{0,0}}{0.3} = \frac{0.5 \times 0.6200860 - 0.2 \times 0.7651977}{0.3} = 0.5233449.$$

Para calcular a aproximação usando o segundo polinômio de grau um, temos

$$Q_{2,1}(1.5) = \frac{(1.5 - x_1)Q_{2,0} - (1.5 - x_2)Q_{1,0}}{x_2 - x_1} =$$

$$\frac{(1.5 - 1.3)0.4554022 - (1.5 - 1.6)0.6200860}{1.6 - 1.3} = 0.5102968.$$

Como 1.5 está entre 1.3 e 1.6, esperamos que esta seja a melhor aproximação de $f(1.5)$ usando polinômio interpolador de grau um.

Método de Neville - exemplo

Para calcular a aproximação usando o terceiro polinômio de grau um, temos

$$Q_{3,1}(1.5) = \frac{(1.5 - x_2)Q_{3,0} - (1.5 - x_3)Q_{2,0}}{x_3 - x_2} =$$

$$\frac{(1.5 - 1.6)0.2818186 - (1.5 - 1.9)0.4554022}{1.9 - 1.6} = 0.5132634.$$

Método de Neville - exemplo

Para calcular a aproximação usando o quarto polinômio de grau um, temos

$$Q_{4,1}(1.5) = \frac{(1.5 - x_3)Q_{4,0} - (1.5 - x_4)Q_{3,0}}{x_4 - x_3} =$$

$$\frac{(1.5 - 1.9)0.1103623 - (1.5 - 2.2)0.2818186}{2.2 - 1.9} = 0.510427.$$

Método de Neville - exemplo

Assim, temos a segunda coluna da tabela Q:

x_i	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$	$Q_{i,4}$
1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968			
1.9	0.2818186	0.5132634			
2.2	0.1103623	0.5104270			

Método de Neville - exemplo

Para calcular a aproximação usando o primeiro polinômio de grau dois, temos

$$Q_{2,2}(1.5) = \frac{(1.5 - x_0)Q_{2,1} - (1.5 - x_2)Q_{1,1}}{x_2 - x_0} =$$

$$\frac{(1.5-1)0.5102968 - (1.5-1.6)0.5233449}{1.6-1} = 0.5124715.$$

Para calcular a aproximação usando o segundo polinômio de grau dois, temos

$$Q_{3,2}(1.5) = \frac{(1.5 - x_1)Q_{3,1} - (1.5 - x_3)Q_{2,1}}{x_3 - x_1} =$$

$$\frac{(1.5 - 1.3)0.5132634 - (1.5 - 1.9)0.5102968}{1.9 - 1.3} = 0.5112857.$$

Método de Neville - exemplo

Para calcular a aproximação usando o terceiro polinômio de grau dois, temos

$$Q_{4,2}(1.5) = \frac{(1.5 - x_2)Q_{4,1} - (1.5 - x_4)Q_{3,1}}{x_4 - x_2} =$$

$$\frac{(1.5 - 1.6)0.510427 - (1.5 - 2.2)0.5132634}{2.2 - 1.6} = 0.5137361.$$

Assim, temos a terceira coluna da tabela Q:

x_i	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$	$Q_{i,4}$
1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968	0.5124715		
1.9	0.2818186	0.5132634	0.5112857		
2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361		

Da mesma forma, calculamos a quarta e quinta colunas da tabela Q, obtendo:

x_i	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$	$Q_{i,4}$
1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968	0.5124715		
1.9	0.2818186	0.5132634	0.5112857	0.5118127	
2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361	0.5118302	0.5118200

Método de Neville - exemplo

Vejamos agora um exemplo da aplicação do Método de Neville para aproximar uma função conhecida.

A tabela a seguir mostra valores de $\ln(x)$ para alguns x_i dados, com as casas decimais dadas corretas.

i	x_i	$\ln(x_i)$
0	2.0	0.6931
1	2.2	0.7885
2	2.3	0.8329

Utilizando o Método de Neville para aproximar o valor de $f(2.1) = \ln(2.1)$, temos

i	x_i	$x - x_i$	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$
0	1.0	0.1	0.6931		
1	2.2	-0.1	0.7885	0.7410	
2	2.3	-0.2	0.8329	0.7441	0.7420

Logo, $P_2(2.1) = Q_{2,2} = 0.7420$.

Como $f(2.1) = \ln(2.1) = 0.7419$ com precisão de quatro casas decimais, o erro absoluto é

$$|f(2.1) - P_2(2.1)| = |0.7419 - 0.7420| = 10^{-4}.$$

No entanto, $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$ e $f'(x) = 1/x^3$. Então, a fórmula do erro fornece

$$|f(2.1) - P_2(2.1)| = \left| \frac{f'''(\xi(2.1))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \right| =$$

$$\left| \frac{1}{3(\xi(2.1))^3}(0.1)(-0.1)(-0.2) \right| \leq \frac{0.002}{3 \times 2^3} = 8.\bar{3} \times 10^{-5}.$$

Note que, nos cálculos feitos, o erro excedeu o limitante teórico.

Isso acontece porque usamos uma precisão de 4 casas decimais, enquanto o resultado teórico pressupõe que os cálculos sejam feitos em aritmética de precisão infinita.

Algoritmo

Interpolação iterada de Neville: dados os números distintos $x_0, x_1, ..., x_n$, os valores $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ como a primeira coluna $Q_{0,0}, Q_{1,0}, ..., Q_{n,0}$ de Q e um número x, calcula a tabela Q tal que $P(x) = Q_{n,n}$, com $P(x)$ polinômio interpolador de f nos pontos $x_0, x_1, ..., x_n$.

Passo 1: Para $i = 1, ..., n$, execute o passo 2:

Passo 2: Para $j = 1, ..., i$, faça

$$Q_{i,j} \leftarrow \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.$$

Passo 3: Devolva Q e pare.

Método de Neville

O algoritmo pode ser modificado a fim de permitir que novas linhas sejam inseridas na tabela Q.

Isto pode ser feito, por exemplo, até que a desigualdade

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,j-1}| < \epsilon,$$

com ϵ dado, seja satisfeita.