Interpolação polinomial: Diferenças divididas de Newton

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

3 de setembro de 2012

Baseado no livro Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Diferenças divididas

Já vimos como construir aproximações sucessivas para um valor de $f(x)$ através de polinômios interpoladores de Lagrange com graus cada vez maiores, usando o Método de Neville.

Veremos agora como construir os polinômios interpoladores de maneira sucessiva.

Diferenças divididas

Suponha que $P_n(x)$ seja o n-ésimo polinômio interpolador de Lagrange que coincide com uma função f nos pontos $x_0, x_1, ..., x_n$.

Embora este polinômio seja único, há diversas formas diferentes de representá-lo.

As diferenças divididas de f em relação a $x_0, x_1, ..., x_n$ são usadas para representar $P_n(x)$ na forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}),$$

para constantes adequadas $a_0, a_1, ..., a_n$.

Para determinar o valor de a_0, note que, quando calculamos $P_n(x_0)$, temos

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0).$$

Da mesma forma, calculando $P_n(x_1)$, temos

$$f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1).$$

Daí, podemos calcular o valor de a_1:

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Diferenças divididas

Apresentamos, agora, a noção de diferença dividida.

A diferença dividida de ordem zero da função f em relação a x_i, denotada $f[x_i]$, é o valor de f em x_i:

$$f[x_i] = f(x_i).$$

Diferenças divididas

A primeira diferença dividida da função f em relação a x_i e x_{i+1}, denotada $f[x_i, x_{i+1}]$, é definida como

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}. \tag{1}$$

A segunda diferença dividida da função f em relação a x_i, x_{i+1} e x_{i+2}, denotada $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$, é definida como

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}.$$

Diferenças divididas

Analogamente, depois das $k-1$-ésimas diferenças divididas

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1}] \text{ e } f[x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}]$$

serem calculadas, a k-ésima diferença dividida com relação a $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}$ é dada por

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Diferenças divididas

O processo continua até que a única n-ésima diferença dividida

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

seja calculada.

Diferenças divididas

Usando esta notação, podemos escrever polinômio interpolador como

$$P_n(x) = f[x_0] + a_1(x - x_0) +$$

$$a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}),$$

com $a_k = f[x_0, x_1, ..., x_k]$, para $0 \leq k \leq n$.

Portanto, o polinômio interpolador pode ser escrito como

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_k](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1}).$$

Note que o valor de $f[x_0, x_1, ..., x_k]$ não depende da ordem dos números $x_0, x_1, ..., x_k$.

Algoritmo

Diferenças divididas de Newton: dados os números distintos $x_0, x_1, ..., x_n$, os valores $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ como a primeira coluna $F_{0,0}, F_{1,0}, ..., F_{n,0}$ de F, calcula a tabela F tal que $F_{i,i} = f[x_0, x_1, ..., x_i]$ e $P(x)$, polinômio interpolador de f nos pontos $x_0, x_1, ..., x_n$, dado por $P(x) = \sum_{i=0}^{n} F_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$.

Passo 1: Para $i = 1, ..., n$, execute o passo 2:

Passo 2: Para $j = 1, ..., i$, faça

$$F_{i,j} \leftarrow \frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.$$

Passo 3: Devolva F e pare.

Diferenças divididas de Newton - exemplo

A tabela a seguir fornece os valores de uma função em vários pontos:

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

Diferenças divididas de Newton - exemplo

A tabela a seguir fornece os valores obtidos aplicando o Método de diferenças divididas de Newton:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, ..., x_i]$	$f[x_{i-3}, ..., x_i]$	$f[x_{i-4}, ..., x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		-0.1087339		
			-0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
			-0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

Diferenças divididas de Newton - exemplo

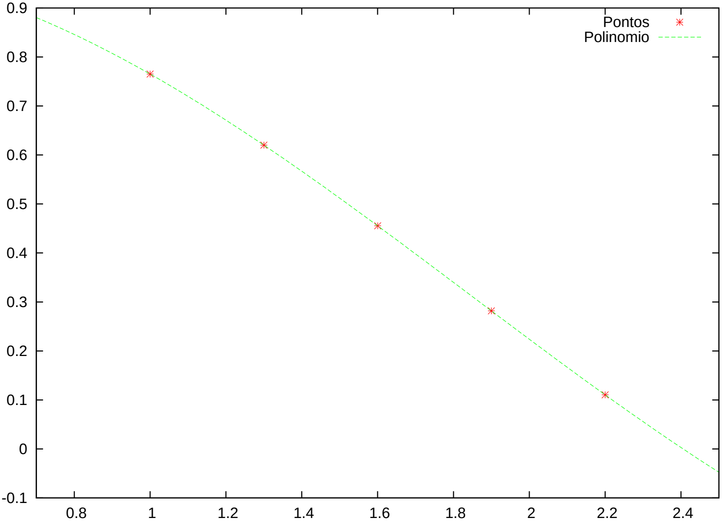
Os coeficientes do polinômio interpolador são obtidos usando os elementos em vermelho da tabela:

$$P_4(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x-1) - 0.1087339(x-1)(x-1.3) +$$

$$0.0658784(x-1)(x-1.3)(x-1.6) +$$

$$0.0018251(x-1)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9).$$

Diferenças divididas de Newton - exemplo



Diferenças divididas de Newton

Se aplicarmos o Teorema do Valor Médio à equação (1), para $i = 0$,

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

temos que, se f' existe, então $f[x_0, x_1] = f'(\xi)$ para algum número ξ entre x_0 e x_1.

Vejamos uma generalização deste resultado.

Teorema 1: *Suponha que* $f \in \mathcal{C}^n[a,b]$ *e* $x_0, x_1, ..., x_n$ *sejam números distintos em* $[a,b]$. *Então, existe um número* ξ *(geralmente desconhecido) em* (a,b) *tal que*

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Diferenças divididas de Newton

A fórmula de diferenças divididas de Newton pode ser expressa de maneira simplificada se os números $x_0, x_1, ..., x_n$ estiverem ordenados e igualmente espaçados.

Denotamos $h = x_{i+1} - x_i$, para $i = 0, ..., n-1$, e $x = x_0 + sh$.

Assim, a diferença $x - x_i$ pode ser escrita como $(s - i)h$.

Diferenças divididas de Newton

O polinômio interpolador pode ser escrito como

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + shf[x_0, x_1] +$$

$$s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \ldots + s(s-1)\ldots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, \ldots, x_n] =$$

$$f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\ldots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \ldots, x_k].$$

Utilizando a notação de coeficiente binomial

$$\begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} = \frac{s(s-1)...(s-k+1)}{k!},$$

temos que

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} k!h^k f[x_0, x_1, ..., x_k].$$

Fórmula de diferenças progressivas de Newton

Usando a notação $f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, temos que

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}\Delta f(x_0),$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h}\left(\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h}\right) = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0).$$

Fórmula de diferenças progressivas de Newton

No caso geral,

$$f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_0).$$

Como $f(x_0) = f[x_0]$, temos que a fórmula de diferenças progressivas de Newton é dada por

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} s \\ k \end{array} \right) \Delta^k f(x_0).$$

Fórmula de diferenças regressivas de Newton

Se ordenarmos os pontos interpoladores de maneira reversa, $x_n, x_{n-1}, ..., x_0$, podemos escrever

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) +$$

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + ... +$$

$$f[x_n, x_{n-1}, ..., x_0](x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1).$$

Fórmula de diferenças regressivas de Newton

Se, além disso, os pontos forem espaçados igualmente entre si, com $x = x_n + sh$ e $x = x_i + (s - n - i)h$, então

$$P_n(x) = P_n(x_n + sh) = f[x_n] + shf[x_n, x_{n-1}] +$$

$$s(s+1)h^2 f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + ... +$$

$$s(s+1)...(s+n-1)h^n f[x_n, ..., x_0].$$

Fórmula de diferenças regressivas de Newton

Definição 1: *Dada uma sequência* $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, *definimos a diferença regressiva* ∇p_n *como*

$$\nabla p_n = p_n - p_{n-1}.$$

Potências mais altas são definidas de forma recursiva por

$$\nabla^k p_n = \nabla(\nabla^{k-1} p_n).$$

Fórmula de diferenças regressivas de Newton

Usando a Definição 1, temos que

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h} \nabla f(x_n),$$

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2} \nabla^2 f(x_n)$$

e, no caso geral,

$$f[x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}] = \frac{1}{k!h^k} \nabla^k f(x_n).$$

Fórmula de diferenças regressivas de Newton

Consequentemente, temos

$$P_n(x) = f[x_n] + s\nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f(x_n) + \ldots +$$

$$\frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n).$$

Fórmula de diferenças regressivas de Newton

Usando a notação

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)\ldots(-s-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{s(s+1)\ldots(s+k-1)}{k!},$$

temos

$$P_n(x) = f[x_n] + (-1)^1 \binom{-s}{1} \nabla f(x_n) + (-1)^2 \binom{-s}{2} \nabla^2 f(x_n) + \ldots +$$

$$(-1)^n \binom{-s}{n} \nabla^n f(x_n).$$

Fórmula de diferenças regressivas de Newton

Isto nos leva à definição da fórmula de diferenças regressivas de Newton, dada por

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} -s \\ k \end{array} \right) \nabla^k f(x_n).$$

Fórmulas de diferenças de Newton - exemplo

A tabela a seguir é a mesma obtida no exemplo anterior após a aplicação do Método de diferenças divididas de Newton:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, ..., x_i]$	$f[x_{i-3}, ..., x_i]$	$f[x_{i-4}, ..., x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		-0.1087339		
			-0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
			-0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

Fórmulas de diferenças de Newton - exemplo

Se for necessária uma aproximação para $f(1.1)$, a escolha razoável para os pontos seria $x_0 = 1$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$, $x_3 = 1.9$ e $x_4 = 2.2$, já que usa o mais rápido possível os números mais próximos de 1.1, além de usar a quarta diferença dividida.

Isso implica que $h = 0.3$ e $s = \frac{1}{3}$.

Fórmulas de diferenças de Newton - exemplo

Assim, a fórmula de diferenças divididas progressiva de Newton é usada com os elementos marcados em vermelho na tabela, obtendo

$$P_4(1.1) = P_4\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)0.3\right) = 0.7651977 + \left(\frac{1}{3}\right)0.3(-0.4837057) +$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)0.3^2(-0.1087339) +$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)0.3^3(0.0658784) +$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)0.3^4(0.0018251) = 0.719646.$$

Fórmulas de diferenças de Newton - exemplo

Para obter uma aproximação para $f(2)$, é preferível utilizar o mais cedo possível os valores do fim da tabela.

Para isso, definimos $h = 0.3$, $s = -\frac{2}{3}$ e usamos a fórmula de diferenças divididas regressiva de Newton.

Fórmulas de diferenças de Newton - exemplo

Usando os elementos marcados em azul na tabela, obtemos

$$P_4(2) = P_4\left(2.2 + \left(-\frac{2}{3}\right)0.3\right) = 0.1103623 + \left(-\frac{2}{3}\right)0.3(-0.5715210) +$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)0.3^2(0.0118183) +$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)0.3^3(0.0680685) +$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)0.3^4(0.0018251) = 0.2238754.$$

Fórmula de diferenças centradas

Quando desejamos calcular uma aproximação de f em um ponto que está próximo do meio dos números $x_0, x_1, ..., x_n$, as fórmulas de diferenças progressiva e regressiva não são as mais adequadas.

Daí surge a necessidade de usar fórmulas de diferenças centradas.

Existem várias fórmulas de diferenças centradas, mas apresentaremos apenas uma: a Fórmula de Stirling.

Fórmula de de Stirling

Usaremos a notação de x_0 para o ponto mais próximo do ponto x a ter o valor de $f(x)$ aproximado, $x_1, x_2, ...$ para os pontos seguintes a x_0 e $x_{-1}, x_{-2}, ...$ para os pontos anteriores a x_0.

Usando esta notação, a Fórmula de Stirling é dada por

$$P_n(x) = P_{2m+1}(x) = f[x_0] + \frac{sh}{2}(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]) + s^2h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] +$$

$$\frac{s(s^2-1)h^3}{2}(f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]) + ... +$$

$$s^2(s^2-1)(s^2-4)...(s^2-(m-1)^2)h^{2m} f[x_{-m}, ..., x_m] +$$

$$\frac{s(s^2-1)...(s^2-m^2)h^{2m+1}}{2}(f[x_{-m-1}, ..., x_m] + f[x_{-m}, ..., x_{m+1}]).$$

Se $n = 2m$ for par, basta eliminar a última linha da fórmula.

Fórmula de de Stirling - exemplo

Considere a mesma tabela obtida no exemplo anterior pelo Método de diferenças divididas de Newton:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, ..., x_i]$	$f[x_{i-3}, ..., x_i]$	$f[x_{i-4}, ..., x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		-0.1087339		
			-0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
			-0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

Fórmula de de Stirling - exemplo

Para obter uma aproximação para $f(1.5)$, consideramos $x_0 = 1.6$, $h = 0.3$ e $s = -\frac{1}{3}$.

Aplicando a Fórmula de Stirling, usando os elementos da tabela marcados em vermelho, obtemos a aproximação

$$f(1.5) \approx P_4(1.6 + (-1/3)0.3) = 0.4554022+$$

$$(-1/3)(0.3/2)(-0.5489460 - 0.5786120) + (-1/3)^2 0.3^2(-0.0494433)+$$

$$(-1/3)((-1/3)^2 - 1)(0.3^3/2)(0.0658784 + 0.0680685)+$$

$$(-1/3)^2((-1/3)^2 - 1)0.3^4(0.0018251) = 0.51182.$$