Solução numérica de Equações Diferenciais Ordinárias: Métodos Previsor-Corretor

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

7 de novembro de 2013

Baseado no livro Cálculo Numérico, de S. Arenales e A. Darezzo.

Considere o Problema de Valor Inicial bem-posto

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha.$$

Podemos obter métodos numéricos para resolver este problema baseados no Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)dt = y(t_{i+1}) - y(t_i).$$

Métodos Previsor-Corretor

Como $y'(t) = f(t, y(t))$, temos

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt.$$

A integral definida pode ser aproximada por diferentes métodos, como os vistos nas aulas anteriores.

Métodos Previsor-Corretor

Aproximando a integral pela Regra do Trapézio, temos

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + \frac{h}{2}[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))]$$

para $h = t_{i+1} - t_i$.

Assim, a aproximação ω_{i+1} de $y(t_{i+1})$ é dada por

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{2}[f(t_i, \omega_i) + f(t_{i+1}, \omega_{i+1})].$$

Métodos Previsor-Corretor

Note que ω_{i+1} aparece nos dois lados da expressão. Logo, temos um **método implícito**.

Os métodos anteriores, em que ω_{i+1} é calculado explicitamente, são chamados **métodos explícitos**.

Para calcular uma aproximação ω_{i+1} de $y(t_{i+1})$ usando um método implícito, utilizamos o seguinte procedimento:

1. Utiliza-se algum método explícito para obter uma aproximação $\omega_{i+1}^{(0)}$ do valor de ω_{i+1}.
2. Faça $k \leftarrow 0$.
3. O valor de $\omega_{i+1}^{(k)}$ é usado no lado direito da expressão do método implícito, obtendo-se uma aproximação $\omega_{i+1}^{(k+1)}$.
4. Se $\frac{|\omega_{i+1}^{(k+1)} - \omega_{i+1}^{(k)}|}{|\omega_{i+1}^{(k+1)}|} \leq \epsilon$, a aproximação $\omega_{i+1}^{(k+1)}$ é aceita como ω_{i+1}.

   Caso contrário, faça $k \leftarrow k + 1$ e volte para o Passo 3.

Métodos Previsor-Corretor

Neste procedimento, o método explícito é chamado Previsor. O método implícito é chamado Corretor.

Usando diferentes previsores (como Método de Euler ou Método de Taylor) e corretores (como a Regra do Trapézio ou a Regra de Simpson), obtemos diferentes Métodos Previsor-Corretor.

Caso o Método Previsor-Corretor não convirja, é necessário diminuir o valor de h.

Exemplo

Considere o Problema de Valor Inicial

$$y'(t) = -2y + 1, \ \ 0 \leq t \leq 1, \ \ y(0) = 1.$$

Utilize o Método Previsor-Corretor, com $N = 5$, Método de Euler como previsor e Regra do Trapézio como corretor, para aproximar a solução $y(t)$. Utilize $\epsilon = 10^{-2}$ para tolerância dos erros.

Como $N = 5$, temos que $h = \frac{1-0}{5} = 0.2$.

Exemplo

O Previsor (Método de Euler) é dado por

$$\omega_{i+1}^{(0)} = \omega_i + hf(t_i, \omega_i) = \omega_i + 0.2(-2\omega_i + 1) = 0.6\omega_i + 0.2.$$

O Corretor (Regra do Trapézio) fornece

$$\omega_{i+1}^{(k+1)} = \omega_i + \frac{h}{2}[f(t_i, \omega_i) + f(t_{i+1}, \omega_{i+1}^{(k)})] =$$

$$\omega_i + \frac{0.2}{2}[(-2\omega_i + 1) + (-2\omega_{i+1}^{(k)} + 1)] = 0.8\omega_i + 0.2 - 0.2\omega_{i+1}^{(k)}.$$

Exemplo

Temos que $\omega_0 = 1$. Vamos calcular ω_1:

- Previsor:

$$\omega_1^{(0)} = 0.6\omega_0 + 0.2 = 0.8.$$

- Corretor:

$$\omega_1^{(1)} = 0.8\omega_0 + 0.2 - 0.2\omega_1^{(0)} = 0.8 + 0.2 - 0.2(0.8) = 0.84.$$

$$\frac{|\omega_1^{(1)} - \omega_1^{(0)}|}{|\omega_1^{(1)}|} = \frac{|0.84 - 0.8|}{|0.84|} = 0.0476 > 10^{-2}.$$

Exemplo

- Corretor:

$$\omega_1^{(2)} = 0.8\omega_0 + 0.2 - 0.2\omega_1^{(1)} = 0.8 + 0.2 - 0.2(0.84) = 0.832.$$

$$\frac{|\omega_1^{(2)} - \omega_1^{(1)}|}{|\omega_1^{(2)}|} = \frac{|0.832 - 0.84|}{|0.832|} = 0.0096 < 10^{-2}.$$

Assim, $\omega_1 = 0.832$.

Exemplo

Vamos calcular ω_2:

- Previsor:

$$\omega_2^{(0)} = 0.6\omega_1 + 0.2 = 0.6(0.832) + 0.2 = 0.6992.$$

- Corretor:

$$\omega_2^{(1)} = 0.8\omega_1 + 0.2 - 0.2\omega_2^{(0)} = 0.8(0.832) + 0.2 - 0.2(0.6992) = 0.7258.$$

$$\frac{|\omega_2^{(1)} - \omega_2^{(0)}|}{|\omega_2^{(1)}|} = \frac{|0.7258 - 0.6992|}{|0.7258|} = 0.0366 > 10^{-2}.$$

Exemplo

- Corretor:

$$\omega_2^{(2)} = 0.8\omega_1 + 0.2 - 0.2\omega_2^{(1)} = 0.8(0.832) + 0.2 - 0.2(0.7258) = 0.7204.$$

$$\frac{|\omega_2^{(2)} - \omega_2^{(1)}|}{|\omega_2^{(2)}|} = \frac{|0.7204 - 0.7258|}{|0.7204|} = 0.0075 < 10^{-2}.$$

Assim, $\omega_2 = 0.7204$.

Exemplo

Vamos calcular ω_3:

- Previsor:

$$\omega_3^{(0)} = 0.6\omega_2 + 0.2 = 0.6(0.7204) + 0.2 = 0.6322.$$

- Corretor:

$$\omega_3^{(1)} = 0.8\omega_2 + 0.2 - 0.2\omega_3^{(0)} = 0.8(0.7204) + 0.2 - 0.2(0.6322) = 0.6499.$$

$$\frac{|\omega_3^{(1)} - \omega_3^{(0)}|}{|\omega_3^{(1)}|} = \frac{|0.6499 - 0.6322|}{|0.6499|} = 0.0272 > 10^{-2}.$$

Exemplo

- Corretor:

$$\omega_3^{(2)} = 0.8\omega_2 + 0.2 - 0.2\omega_3^{(1)} = 0.8(0.7204) + 0.2 - 0.2(0.6499) = 0.6463.$$

$$\frac{|\omega_3^{(2)} - \omega_3^{(1)}|}{|\omega_3^{(2)}|} = \frac{|0.6463 - 0.6499|}{|0.6463|} = 0.0056 < 10^{-2}.$$

Assim, $\omega_3 = 0.6463$.

Exemplo

Vamos calcular ω_4:

- Previsor:

$$\omega_4^{(0)} = 0.6\omega_3 + 0.2 = 0.6(0.6463) + 0.2 = 0.5878.$$

- Corretor:

$$\omega_4^{(1)} = 0.8\omega_3 + 0.2 - 0.2\omega_4^{(0)} = 0.8(0.6463) + 0.2 - 0.2(0.5878) = 0.5995.$$

$$\frac{|0.5995 - 0.5878|}{|0.5995|} = 0.0195 > 10^{-2}.$$

Exemplo

- Corretor:

$$\omega_4^{(2)} = 0.8\omega_3 + 0.2 - 0.2\omega_4^{(1)} = 0.8(0.6463) + 0.2 - 0.2(0.5995) = 0.5971.$$

$$\frac{|0.5971 - 0.5995|}{|0.5971|} = 0.004 < 10^{-2}.$$

Assim, $\omega_4 = 0.5971$.

Exemplo

Vamos calcular ω_5:

- Previsor:

$$\omega_5^{(0)} = 0.6\omega_4 + 0.2 = 0.6(0.5971) + 0.2 = 0.5583.$$

- Corretor:

$$\omega_5^{(1)} = 0.8\omega_4 + 0.2 - 0.2\omega_5^{(0)} = 0.8(0.5971) + 0.2 - 0.2(0.5583) = 0.566.$$

$$\frac{|\omega_5^{(1)} - 0.5583|}{|\omega_5^{(1)}|} = \frac{|0.566 - 0.5583|}{|0.566|} = 0.0549.$$

Exemplo

- Corretor:

$$\omega_5^{(2)} = 0.8\omega_4 + 0.2 - 0.2\omega_5^{(1)} = 0.8(0.5971) + 0.2 - 0.2(0.566) = 0.5645.$$

$$\frac{|0.5645 - 0.566|}{|0.5645|} = 0.0027 < 10^{-2}.$$

Assim, $\omega_5 = 0.5645$.

Exemplo

A solução exata do Problema de Valor Inicial do exemplo é $y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$. A tabela abaixo contém as aproximações ω_i, os valores corretos y_i e os erros cometidos.

t_i	$y_i = y(t_i)$	ω_i	$\lvert\omega_i - y_i\rvert$
0.0	1.0000	1.0000	0.0000
0.2	0.8352	0.8320	0.0032
0.4	0.7247	0.7204	0.0043
0.6	0.6506	0.6463	0.0043
0.8	0.6009	0.5971	0.0038
1.0	0.5677	0.5645	0.0032