Resolução de sistemas de equações lineares: Método de eliminação de Gauss - estratégias de pivotamento

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

3 de setembro de 2012

Baseado no livro Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Ao desenvolver Método de eliminação de Gauss, notamos que, para que o método funcione, é necessário que linhas sejam trocadas quando o elemento pivô $a_{kk}^{(k)}$ é nulo.

Para reduzir os erros de arredondamento, frequentemente é necessário que sejam trocadas linhas, mesmo quando o elemento pivô não é nulo.

Se $a_{kk}^{(k)}$ for pequeno em módulo em relação a $a_{jk}^{(k)}$, o módulo do multiplicador

$$m_{ji} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

será muito maior do que 1.

Estratégias de pivotamento

O erro de arredondamento introduzido no cálculo de um dos termos $a_{kl}^{(k)}$ é multiplicado por m_{jk} ao calcularmos $a_{kl}^{(k+1)}$.

Além disso, ao se realizar a substituição regressiva

$$x_k = \frac{a_{k(n+1)}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},$$

para um valor pequeno de $a_{kk}^{(k)}$, qualquer erro no numerador pode ser muito aumentado por causa da divisão por $a_{kk}^{(k)}$.

No exemplo a seguir, vemos como os erros de arredondamento podem acontecer, até mesmo na resolução de sistemas muito pequenos.

O sistema linear

$$\begin{cases} E_1: & 0.003x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17, \\ E_2: & 5.291x_1 & - & 6.13x_2 & = & 46.78 \end{cases}$$

tem uma solução exata $x_1 = 10$ e $x_2 = 1$.

Erros de arredondamento na eliminação de Gauss - exemplo

Suponha que a eliminação de Gauss seja aplicada neste sistema, usando aritmética de quatro dígitos com arredondamento.

O primeiro elemento pivô $a_{11}^{(1)} = 0.003$ é pequeno. E seu multiplicador associado,

$$m_{21} = \frac{5.291}{0.003} = 1763.6\bar{6},$$

é arredondado para o número (grande) 1764.

Erros de arredondamento na eliminação de Gauss - exemplo

Executando a operação $(E_2 - m_{21}E_1) \to (E_2)$, e os devidos arredondamentos, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} E_1: & 0.003x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17, \\ E_2: & & - & 104300x_2 & \approx & -104400, \end{cases}$$

no lugar do sistema preciso

$$\begin{cases} E_1: & 0.003x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17, \\ E_2: & & - & 104309.37\bar{6}x_2 & = & -104309.37\bar{6}. \end{cases}$$

A grande diferença dos valores dos módulos de $m_{21}a_{13}$ e a_{23} introduziu erros de arredondamento, mas estes erros ainda não se propagaram.

A substituição regressiva faz com que $x_2 \approx 1.001$, que está próximo do valor correto $x_2 = 1$.

Erros de arredondamento na eliminação de Gauss - exemplo

No entanto, devido ao pequeno valor do módulo do elemento pivô $a_{11}^{(2)}$, quando o valor de x_1 é calculado, temos

$$x_1 \approx \frac{59.17 - (59.14)(1.001)}{0.003} = -10.00,$$

que contém o erro 0.001 multiplicado por

$$\frac{59.14}{0.003} \approx 20000.$$

Isso resulta em uma aproximação muito ruim para o valor de x_1.

Estratégia de pivotamento

Este tipo de problema ocorre quando o elemento pivô $a_{kk}^{(k)}$ tem módulo muito menor do que os módulos dos elementos $a_{ij}^{(k)}$, para $k \leq i \leq n$ e $k \leq j \leq n$.

Para tentar evitar que este tipo de erro aconteça, é feito um pivotamento: selecionamos um elemento $a_{pq}^{(k)}$ com módulo maior do que o pivô e trocamos as linhas k e p e as colunas k e q, para que o elemento $a_{pq}^{(k)}$ se torne, então, o novo pivô.

Estratégia de pivotamento parcial

A estratégia mais simples de pivotamento é selecionar um elemento da mesma coluna k que esteja abaixo da diagonal e tenha módulo maior do que o pivô $a_{kk}^{(k)}$.

Ou seja, determinamos o menor p, com $k \leq p \leq n$, tal que

$$|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|,$$

e depois executamos a operação $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$. Note que nenhuma permutação de coluna é necessária.

Esta estratégia de pivotamento é chamada de pivotamento parcial

Eliminação de Gauss com pivotamento parcial - exemplo

Considere novamente o sistema linear do exemplo anterior:

$$\begin{cases} E_1: & 0.003x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17, \\ E_2: & 5.291x_1 & - & 6.13x_2 & = & 46.78. \end{cases}$$

A estratégia de pivotamento parcial define primeiro

$$\max\{|a_{11}^{(1)}|, |a_{21}^{(1)}|\} = \max\{|0.003|, |5.291|\} = |5.291| = |a_{21}^{(1)}|.$$

Em seguida, é feita a operação $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$, determinando o sistema

$$\begin{cases} E_1: & 5.291x_1 & - & 6.13x_2 & = & 46.78, \\ E_2: & 0.003x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17. \end{cases}$$

Para este sistema, o multiplicador m_{21} é dado por

$$m_{21} = \frac{0.003}{5.291} = 0.000567.$$

A operação $(E_2 - m_{21}E_1) \to (E_2)$ reduz o sistema para

$$\begin{cases} E_1: & 5.291x_1 & - & 6.13x_2 & = & 46.78, \\ E_2: & & & 59.14x_2 & \approx & 59.14. \end{cases}$$

Usando quatro algarismos com arredondamento, os valores resultantes da aplicação da substituição regressiva neste sistema são os valores corretos $x_1 = 10$ e $x_2 = 1$.

Algoritmo

Método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial: dados o número n de equações e variáveis, uma matriz aumentada $[A, b]$, com n linhas e $n+1$ colunas, devolve um sistema linear triangular inferior equivalente ao sistema inicial ou emite uma mensagem de erro.

Passo 1: Para $i = 1, ..., n-1$, execute os passos 2 a 4:

Passo 2: Faça p ser o menor inteiro tal que $|a_{pi}^{(i)}| = \max_{i \leq j \leq n} |a_{ji}^{(i)}|$, $i \leq p \leq n$. Se $a_{pi}^{(i)} = 0$, então escreva "não existe uma solução única" e pare.

Passo 3: Se $p \neq i$ então faça $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$.

Passo 4: Para $j = i+1, ..., n$, execute os passos 5 e 6:

Passo 5: Faça $m_{ji} \leftarrow \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$.

Passo 6: Faça $(E_j - m_{ji} E_i) \rightarrow (E_j)$.

Passo 7: Devolva $[A, b]$ como solução e pare.

Algoritmo

Método de substituição regressiva: dados o número n de equações e variáveis, uma matriz aumentada $[A, b]$, com n linhas, $n+1$ colunas e A triangular inferior, resolve o sistema linear ou emite uma mensagem dizendo que a solução do sistema linear não é única.

Passo 1: Se $a_{nn} = 0$, então escreva "não existe uma solução única" e pare.

Passo 2: Faça $x_n \leftarrow \frac{a_{n(n+1)}}{a_{nn}}$.

Passo 3: Para $i = n-1, ..., 1,$, execute os passos 4 e 5:

Passo 4: Se $a_{ii} = 0$, então
escreva "não existe uma solução única" e pare.

Passo 5: Faça $x_i \leftarrow \frac{a_{i(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$.

Passo 6: Devolva $(x_1, x_2, ..., x_n)$ como solução e pare.

Cada multiplicador m_{ji} do Método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial tem módulo menor ou igual a 1.

Embora isso resolva muitos problemas, há ainda casos nos quais erros numéricos podem atrapalhar a resolução do sistema linear. Veja o exemplo a seguir.

Considere o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{lrcrcr} E_1: & 30.00x_1 & + & 591400x_2 & = & 591700, \\ E_2: & 5.291x_1 & - & 6.13x_2 & = & 46.78, \end{array} \right.$$

usando aritmética de quatro algarismos com arredondamento.

Eliminação de Gauss com pivotamento parcial - exemplo

Usando o Método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial, temos o multiplicador

$$m_{21} = \frac{5.291}{30.00} = 0.1764,$$

que leva ao sistema

$$\begin{cases} E_1: & 30.00x_1 & + & 591400x_2 & = & 591700, \\ E_2: & & - & 104300x_2 & \approx & -104400, \end{cases}$$

e aos mesmos resultados imprecisos $x_1 \approx -10$ e $x_2 \approx 1.001$ obtidos no primeiro exemplo.