Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Determinação numérica de autovalores e autovetores
Método da Potência Inversa

25 Nov 2008 . 16:24

Método da potência inversa

- O método das potências obtém o maior autovalor (em módulo).

- Caso desejemos obter o autovalor de menor valor absoluto, usamos o *método da potência inversa.*

Método da potência inversa

- Similar ao método das potências. Entretanto, assumimos:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$$

e queremos calcular λ_n

Usando a matriz inversa

- Se λ é autovalor de A, então λ^{-1} é autovalor de A^{-1}
- Se λ_n é o menor autovalor de A, então λ_n^{-1} será o maior autovalor de A^{-1}.
- Então, para obter o menor autovalor (em módulo) de A, o que fazemos é aplicar o método das potências (que calcula o maior autovalor em módulo) à matriz inversa, A^{-1}.

Procedimento

$$
\begin{aligned}
z_{k+1} &= A^{-1} y_k \\
y_{k+1} &= \frac{1}{\alpha_{k+1}} z_{k+1}, \quad \text{onde } \alpha_{k+1} = \max_{1 \le r \le n} |\, (z_{k+1})_r \,|
\end{aligned}
$$

E como antes:

$$
\lambda_n^{-1} = \frac{(z_{k+1})_r}{(y_k)_r}
$$

Evitando o cálculo de A^{-1}

- Note que não é necessário calcular a matriz inversa:

$$z_{k+1} = A^{-1} y_k \Rightarrow A z_{k+1} = y_k \ ,$$

E para resolver o sistema, usamos decomposição LU.

Por que ?

As matrizes L e U são independentes da iteração k e portanto, só precisamos calculá-las uma única vez.

Exemplo:

Exemplo 7.5 - *Deteminar o menor auto-valor, em módulo, da matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

usando o método da potência inversa.

Solução:

Decompondo A em LU, obtemos:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix} , \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5.25 \end{pmatrix}$$

Tomando $y_0=(1,1,1)^t$, resolvemos: $LUz_1 = y_0$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0.5715 \\ -0.1429 \\ 0.1905 \end{pmatrix} , \ \alpha_1 = 0.5715 , \quad y_1 = \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2500 \\ 0.3333 \end{pmatrix}$$

Solução:

- Resolvendo $LUz_2 = y_1$

$$z_2 = \begin{pmatrix} 0.7024 \\ -0.4048 \\ 0.1230 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_3^{-1} = \frac{(z_2)_r}{(y_1)_r} = \begin{pmatrix} 0.7024 \\ 1.6192 \\ 0.3690 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = 0.7024. \longrightarrow \quad y_2 = \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5763 \\ 0.1751 \end{pmatrix}$$

- Resolvendo $LUz_3 = y_2$

$$z_3 = \begin{pmatrix} 0.7377 \\ -0.4754 \\ 0.1084 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3^{-1} = \frac{(z_3)_r}{(y_2)_r} = \begin{pmatrix} 0.7377 \\ 0.8249 \\ 0.6192 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$\alpha_3 = 0.7377$$

$$y_3 = \frac{1}{\alpha_3} z_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6444 \\ 0.1469 \end{pmatrix}$$

$$\text{de} \quad LUz_4 = y_3 \Rightarrow z_4 = \begin{pmatrix} 0.7454 \\ -0.4908 \\ 0.1063 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_3^{-1} = \frac{(z_4)_r}{(y_3)_r} = \begin{pmatrix} 0.7454 \\ 0.7617 \\ 0.7235 \end{pmatrix} \qquad \alpha_4 = 0.7454,$$

Solução

$$y_4 = \frac{1}{\alpha_4} z_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6584 \\ 0.1426 \end{pmatrix}$$ e de $LU z_5 = y_4 \Rightarrow z_5 = \begin{pmatrix} 0.7471 \\ -0.4942 \\ 0.1061 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \lambda_3^{-1} = \frac{(z_5)_r}{(y_4)_r} = \begin{pmatrix} 0.7471 \\ 0.7506 \\ 0.7443 \end{pmatrix}$$

$$\frac{|\lambda_{3_{(4)}}^{-1} - \lambda_{3_{(3)}}^{-1}|_\infty}{|\lambda_{3_{(4)}}^{-1}|_\infty} = \begin{pmatrix} 0.002 \\ 0.015 \\ 0.0028 \end{pmatrix}$$

Logo $\lambda_3^{-1} \simeq 0.7471$ é o auto-valor de maior valor absoluto de A^{-1}.

$\frac{1}{\lambda_3^{-1}} \simeq 1.3385$ é o auto-valor de menor valor absoluto de A.