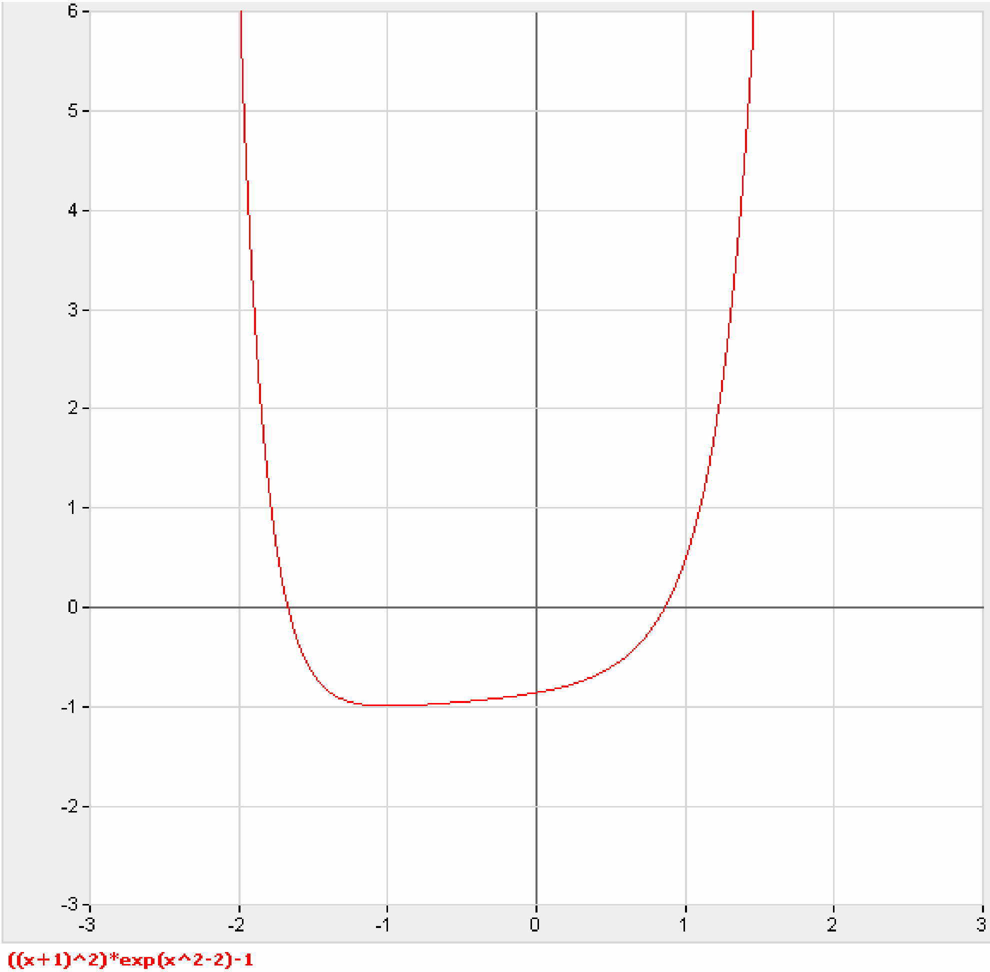
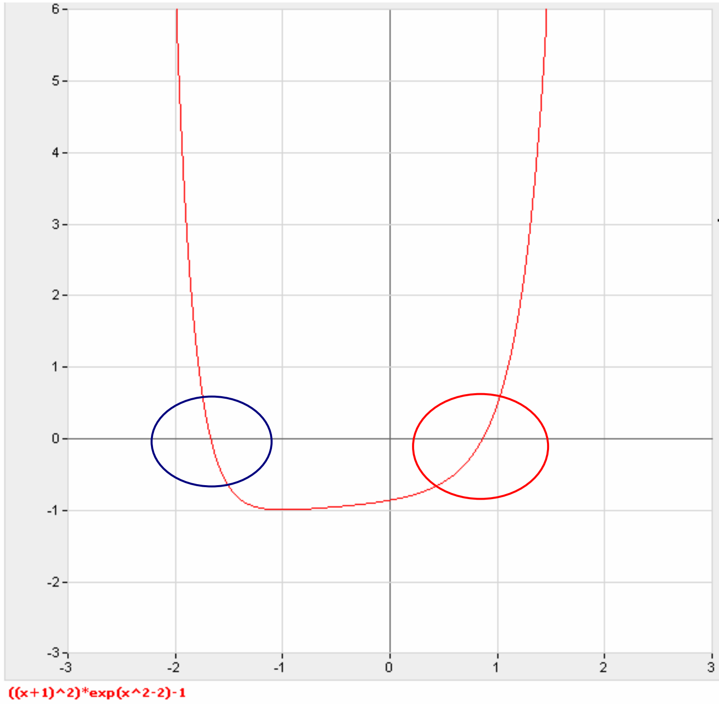
Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Solução de equações:
Método da bissecção

Exemplos: f: R $\to$ R; $f(x) = (x+1)^2 e^{x^2-2} - 1 = 0$



Idéia da bisseção



f(-1.5) = + ou - ?

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	4385.5	6.4	-1	-0.9	0.5	65.5	17545.1

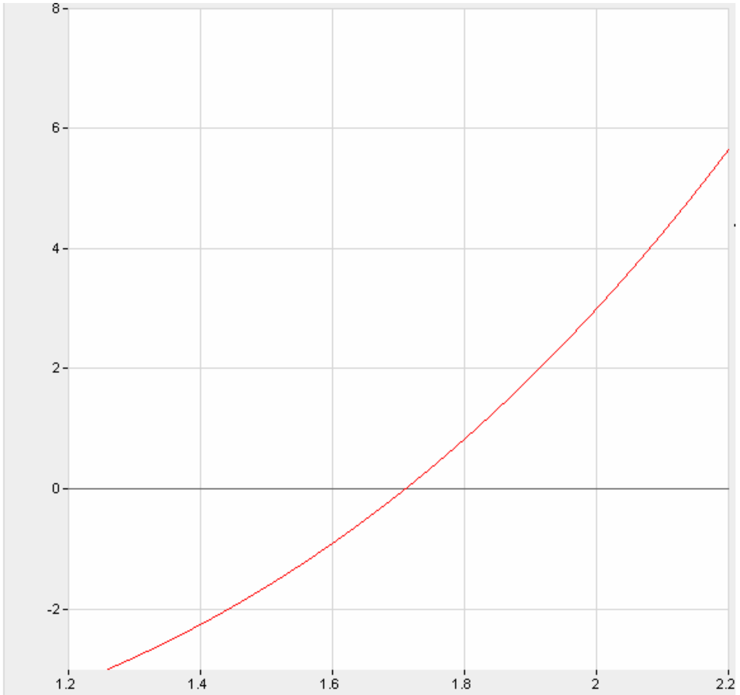
Bissecção (algoritmo)

- Dado um intervalo]a,b[com $f(a) \times f(b) < 0$
- Escolha $c = (a+b)/2$
- Se $f(c) = 0$! FIM
- Se $f(c) \times f(a) < 0$
  - Existe uma raiz no intervalo]a,c[
- Se $f(c) \times f(b) < 0$
  - Existe uma raiz no intervalo]c,b[

Podemos recomeçar com o novo intervalo e melhorar a aproximação da raiz!

Bissecção (Exemplo)

- Achar a raiz cúbica de 5
- $f(x) = x^3 - 5 = 0$



existe raiz entre x=1 e x=2
f(x=1) = -4
f(x=2) = 3

$$[a_0, b_0] = [1, 2], \quad p_0 = 1.500000, \quad f(p_0) = -1.625000$$

$$[a_1, b_1] = [p_0, b_0], \quad p_1 = 1.750000, \quad f(p_1) = 0.359375$$

$$[a_2, b_2] = [a_1, p_1], \quad p_2 = 1.625000, \quad f(p_2) = -0.708984$$

$$[a_3, b_3] = [p_2, b_2], \quad p_3 = 1.687500, \quad f(p_3) = -0.194580$$

$$[a_4, b_4] = [p_3, b_3], \quad p_4 = 1.718750, \quad f(p_4) = 0.077362$$

$$[a_5, b_5] = [a_4, p_4], \quad p_5 = 1.703125, \quad f(p_5) = -0.059856$$

Programando a bissecção

- exemplo: Excell e $f(x) = (x/2)^2$ - sen(x)

Programando a bissecção

- exemplo: Excell e $f(x) = (x/2)^2 - sen(x)$

Iter	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	f(a)xf(c)
1	1,50000	2,00000	1,75000	-0,434995	0,0907026	-0,218361	0,094985917
2	1,75000	2,00000	1,87500	-0,218361	0,0907026	-0,07518	0,016416274
3	1,87500	2,00000	1,93750	-0,07518	0,0907026	0,0049623	-0,000373062
4	1,87500	1,93750	1,90625	-0,07518	0,0049623	-0,035814	0,002692464
5	1,90625	1,93750	1,92188	-0,035814	0,0049623	-0,015601	0,000558746
6	1,92188	1,93750	1,92969	-0,015601	0,0049623	-0,005363	8,36766E-05
7	1,92969	1,93750	1,93359	-0,005363	0,0049623	-0,000212	1,13439E-06
8	1,93359	1,93750	1,93555	-0,000212	0,0049623	0,0023727	-5,01829E-07
9	1,93359	1,93555	1,93457	-0,000212	0,0023727	0,0010799	-2,28402E-07
10	1,93359	1,93457	1,93408	-0,000212	0,0010799	0,000434	-9,17978E-08

Bissecção encontra uma raiz!

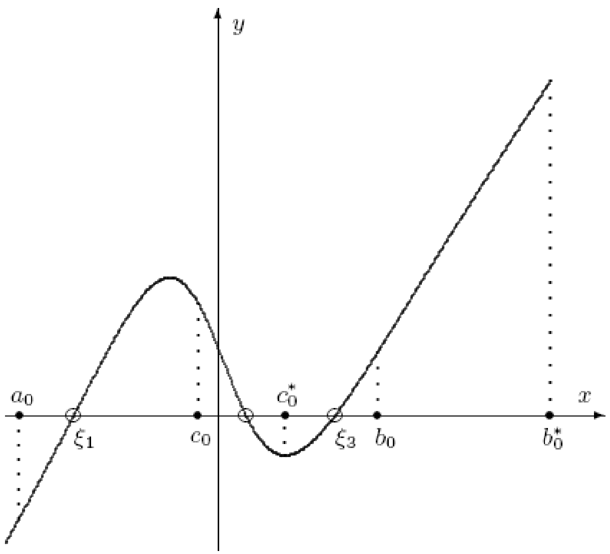


Fig. 1.7. Bisection; from the initial interval $[a_0, b_0]$ the next interval is $[a_0, c_0]$, but starting from $[a_0, b_0^*]$ the next interval is $[c_0^*, b_0^*]$.

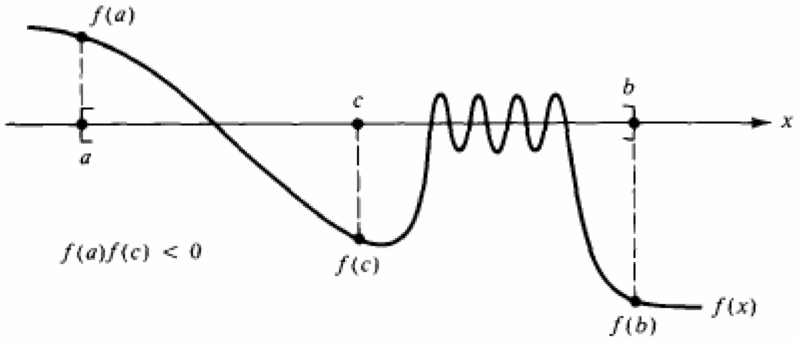


Figure 3.1(a) Bisection method selects left subinterval

Critérios de parada

- $|a-b| < \varepsilon_1$
- $|f(c)| < \varepsilon_2$

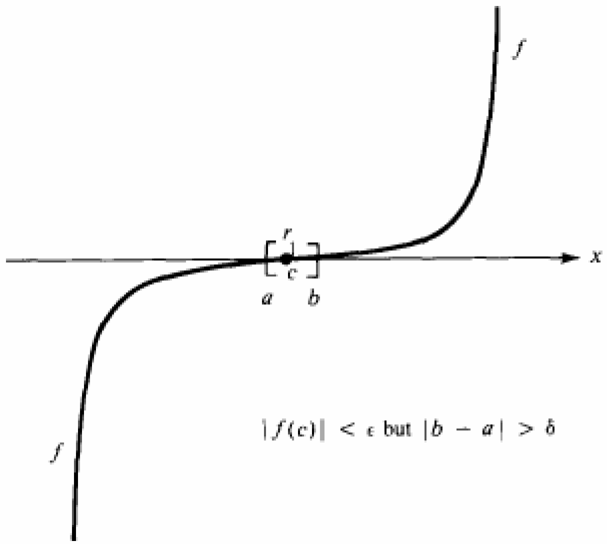


Figure 3.2(a) Criterion $|b-a| < \delta$ failure

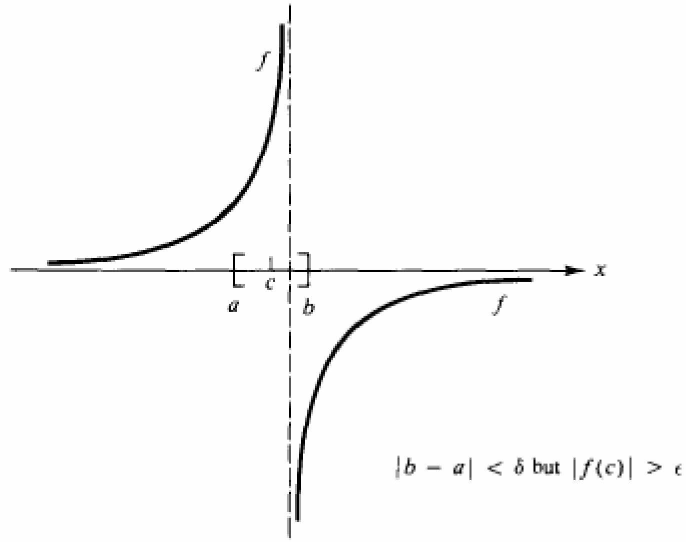


Figure 3.2(b) Criterion $|f(c)| < \varepsilon$ failure

Erro relativo

- Pode ser mais interessante considerar-se o erro relativo.

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon$$

Escrevemos esse erro na forma:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \times \max\{1, |x_{k+1}|\}$$

(Por que ?)

Estudo da convergência (1/3)

- Ruggiero e Lopes Cap. 2

$[a_0, b_0]$

a_k: não decrescente e limitada superiormente por b_0

$[a_1, b_1]$

$$lim_{k\to\infty} a_k = r$$

$[a_2, b_2]$

...

b_k: não crescente e limitada inferiormente por a_0

$[a_k, b_k]$

$$lim_{k\to\infty} b_k = l$$

Estudo da convergência (2/3)

- A cada iteração, a amplitude do intervalo é dividida pela metade:

$$\forall k, b_k - a_k = \frac{(b_0 - a_0)}{2^k}$$

$$lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = lim_{k\to\infty}\frac{(b_0 - a_0)}{2^k} = 0$$

ambos convergentes

$$lim_{k\to\infty}b_k - lim_{k\to\infty}a_k = 0 \Rightarrow \boxed{lim_{k\to\infty}b_k = lim_{k\to\infty}a_k}$$

$= x^*$

temos que provar que $f(x^*) = 0$

Estudo da convergência (3/3)

- em cada iteração temos $f(a_k) \times f(b_k) \leq 0$

$$0 \geq lim_{k \to \infty} f(a_k) f(b_k) =$$

$$lim_{k \to \infty} f(a_k) lim_{k \to \infty} f(b_k) =$$

$$f(lim_{k \to \infty} a_k) f(lim_{k \to \infty} b_k) =$$

$$f(x*) f(x*) = [f(x*)]^2 \geq 0$$

$f(x^*) = 0$

Pseudo-código

```
FUNCTION Bissecção(xl, xu, es, imax, xr, iter, ea)
  iter = 0
  DO
    xrold = xr
    xr = (xl + xu) / 2
    iter = iter + 1
    IF xr ≠ 0 THEN
       ea = ABS((xr − xrold) / xr) * 100
    END IF
    test = f(xl) * f(xr)
    IF test < 0 THEN
       xu = xr
    ELSE IF test > 0 THEN
       xl = xr
    ELSE
       ea = 0
    END IF
    IF ea < es OR iter ≥ imax EXIT
  END DO
  Bissecção = xr
END Bissecção
```

Retirado de Chapra&Canale, Métodos numéricos para engenharia

Pseudo-código II

```
FUNCTION Bissecção(xl, xu, es, imax, xr, iter, ea)
  iter = 0
  fl = f(xl)
  DO
    xrold = xr
    xr = (xl + xu) / 2
    fr = f(xr)
    iter = iter + 1
    IF xr ≠ 0 THEN
      ea = ABS((xr − xrold) / xr) * 100
    END IF
    test = fl * fr
    IF test < 0 THEN
      xu = xr
    ELSE IF test > 0 THEN
      xl = xr
      fl = fr
    ELSE
      ea = 0
    END IF
    IF ea < es OR iter ≥ imax EXIT
  END DO
  Bissecção = xr
END Bissecção
```

Retirado de Chapra&Canale, Métodos numéricos para engenharia