Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Solução de equações:

Método do ponto fixo (iterativo linear)

15:01

Idéia

- Queremos resolver

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

- Se garantirmos que a solução de

$$x = \psi(x) \tag{2}$$

também é solução de $f(x) = 0$, podemos resolver (2) em lugar de (1).

x é chamado um ponto fixo de (2)!

Como obter ψ(x) ?

- Qualquer ψ(x) da forma:

$$\psi(x) = x + A(x)f(x)$$

desde $A(\bar{x}) \neq 0$, onde $\bar{x}$ é raiz de f().

Por que ?

Para $\bar{x}$, $f(\bar{x}) = \dfrac{\psi(\bar{x})-\bar{x}}{A(\bar{x})} = 0 \longrightarrow \psi(x) = x$

Exemplos

- $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$

$$x = x^2 - 2$$

$$x = \sqrt{2 + x}$$

$$x = 1 + \frac{2}{x}$$

$$x = x - \frac{x^2 - 2x - 8}{m}$$

Processo iterativo:

$$x_{k+1} = \psi(x_k)$$

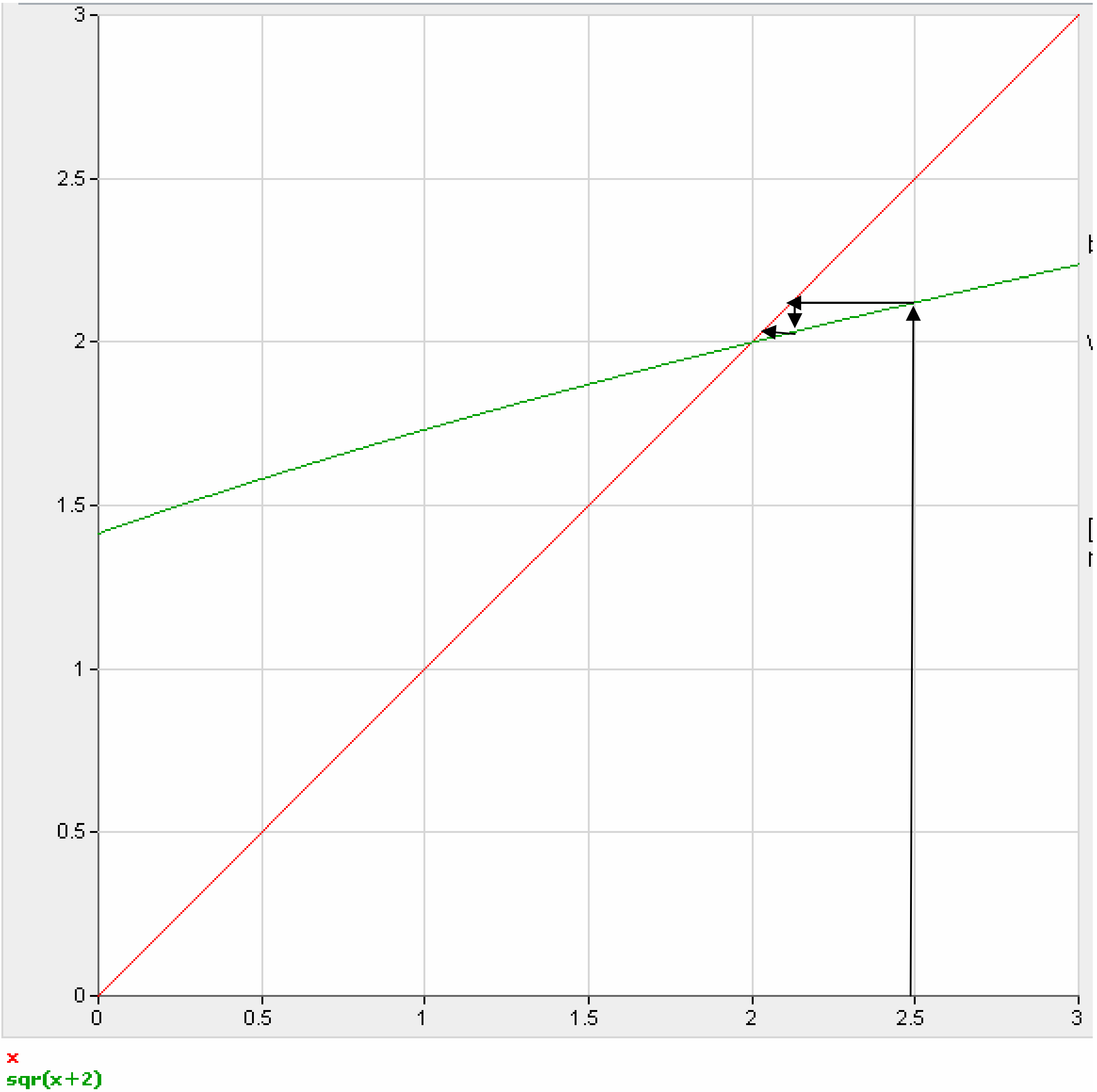
Funciona ?

- tome $x = \sqrt{2+x}$ para resolver o problema:

Será que funciona ?

$$x_0 = 2.5 \quad \rightarrow \quad \psi(x_0) = 2.12$$
$$x_1 = \psi(x_0) = 2.12 \rightarrow \psi(x_1) = 2.03$$
$$x_2 = \psi(x_1) = 2.03 \rightarrow \psi(x_1) = 2.008$$

Funciona ?



Sempre funciona ?

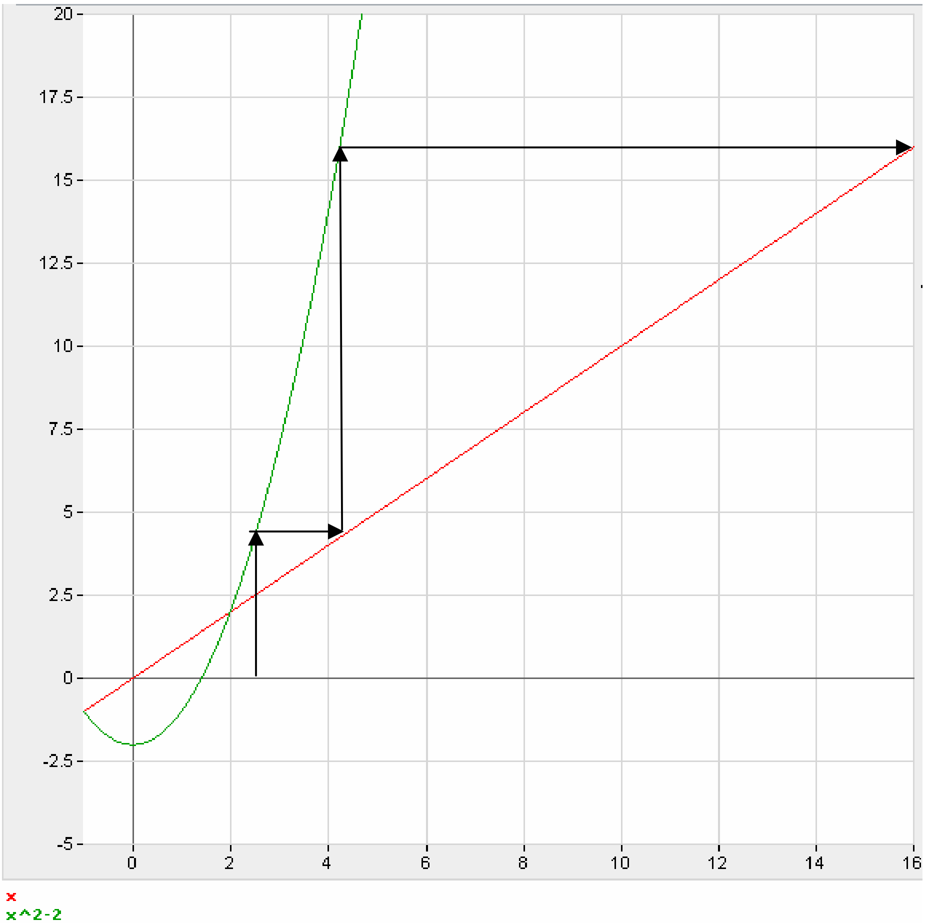
- tome $x = x^2 - 2$ para resolver o problema anterior:

Será que funciona ?

$$x_0 = 2.5 \quad \rightarrow \quad \psi(x_0) = 4.25$$
$$x_1 = \psi(x_0) = 4.25 \rightarrow \psi(x_1) = 16.0625$$
$$x_2 = \psi(x_1) = 16.0625 \rightarrow \psi(x_1) = 256.0039$$

Funciona ?

$$x_0 = 2.5 \quad \rightarrow \quad x_1 = \psi(x_0) = 4.25 \rightarrow x_2 = \psi(x_1) = 16.0625$$



Claramente precisamos garantir as condições de convergência se queremos usar este método

Convergência

Lembrete I:

Teorema do valor médio: Se f é contínua em [a,b] e diferenciável em (a,b) então existe ao menos um ponto ξ, no intervalo (a,b) tal que:

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teorema 3.4

- Seja $\psi(x)$ uma função contínua, com derivadas primeira e segunda contínuas num intervalo fechado I da forma $I = (\bar{x}-h, \bar{x}+h)$, cujo centro x é solução de $\bar{x}=\psi(\bar{x})$. Seja $x_0 \in I$ e M um limitante da forma $|\psi'(x)| \leq M < 1$. Então:

a) a iteração $x_{k+1} = \psi(x_k)$, $k=0,1,\ldots$, pode ser executada indefinidamente pois $x_k \in I, \forall k$

b) $|x_k - \bar{x}| \to 0$

c) se $\psi'(\bar{x}) \neq 0$ ou $\psi(\bar{x}) = 0$ e $\psi''(\bar{x}) \neq 0$ e se $|x_0-\bar{x}|$ for suficientemente pequeno, então a sequencia $x_1, x_2, \ldots$ será monotônica ou oscilante.

Prova a) (1/3)

- a) Provamos por indução.

i) por hipótese, $x_0 \in I$

ii) supomos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ em I e mostramos que $x_{k+1} \in I$.

$$x_{k+1} - \overline{x} = \psi(x_k) - \psi(\overline{x})$$

do processo iterativo

da condição de optimalidade

Prova a) (2/3)

- a) Provamos por indução.

i) por hipótese, $x_0 \in I$

ii) supomos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ em I e mostramos que $x_{k+1} \in I$.

$$x_{k+1} - \overline{x} = \underbrace{\psi(x_k) - \psi(\overline{x})}$$

Pelo teorema do valor médio:

$$x_{k+1} - \overline{x} = \psi'(\xi_k)(x_k - \overline{x})$$

Tomando o módulo

Da hipótese
$|\psi'(x)| \leq M$

$$|x_{k+1} - \overline{x}| = |\psi'(\xi_k)||(x_k - \overline{x})| \leq M|x_k - \overline{x}|$$

Prova a) (3/3)

$$|x_{k+1} - \overline{x}| = |\psi'(\xi_k)||(x_k - \overline{x})| \leq M|x_k - \overline{x}|$$

$$|x_{k+1} - \overline{x}| \leq M|x_k - \overline{x}|$$

Como M<1, e x_k está em I (centrado em $\overline{x}$), $x_{k+1} \in I$

Prova b)

$|xk - x| \rightarrow 0$

$$|x_k - \overline{x}| \leq M|x_{k-1} - \overline{x}| \leq M^2|x_{k-2} - \overline{x}| \leq \ldots$$

$$\ldots \leq M^k|x_o - \overline{x}|$$

$$lim_{k\rightarrow\infty} M^k|x_o - \overline{x}| = 0$$ Pois M < 1

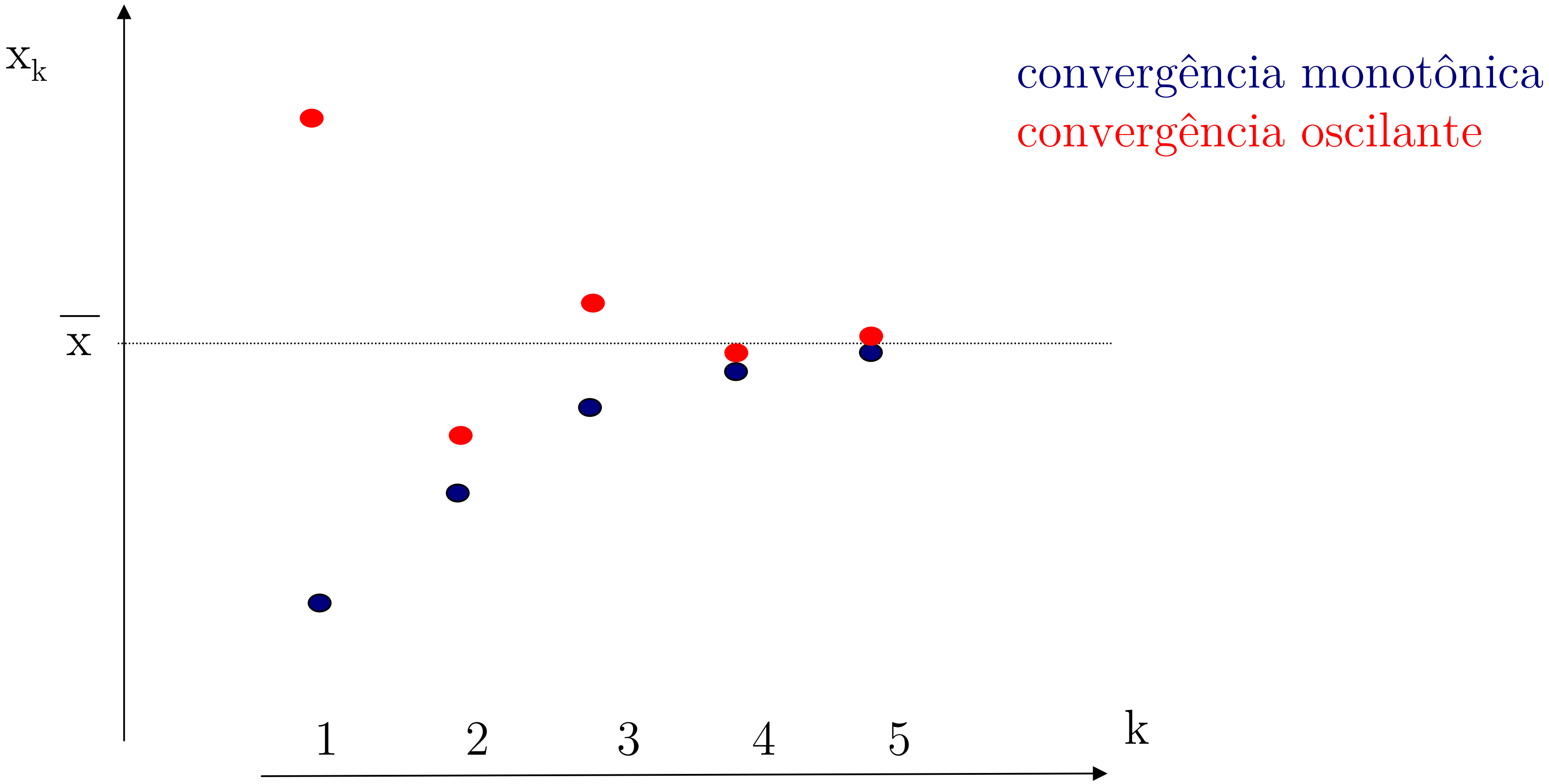
$$\downarrow$$

$$lim_{k\rightarrow\infty}|x_k - \overline{x}| = 0$$

Observação... x_k converge, mas como ?

$|xk - x| \rightarrow 0$

$$lim_{k\rightarrow\infty}|x_k - \overline{x}| = 0$$



prova c)

Lembrete II:

Teorema da permanência do sinal: Se f é uma função real de variável real definida e contínua numa vizinhança de x_0. Se $f(x_0) \neq 0$, então $f(x) \neq 0$ para todo x pertencente a uma vizinhança suficientemente pequena de x_0

prova c)

- se $\psi'(x) \neq 0$ ou $\psi'(x) = 0$ e $\psi''(x) \neq 0$ e se $|x_0 - x|$ for suficientemente pequeno, então a sequencia x_1, x_2, ... será monotônica ou oscilante.

- Caso 1: $\psi'(\overline{x}) \neq 0$

  Pelo teorema de permanência do sinal, $\psi'(x)$ manterá o mesmo sinal em uma vizinhança suficientemente pequena de $\overline{x}$

$$x_{k+1} - \overline{x} = \psi(x_k) - \psi(\overline{x})$$

Do teorema do valor médio:

$$x_{k+1} - \overline{x} = \psi'(\xi_k)(x_k - \overline{x})$$

prova c)

- Caso 1: $\psi'(\overline{x}) \neq 0$

$$x_{k+1} - \overline{x} = \psi'(\xi_k)(x_k - \overline{x})$$

como $lim_{k\to\infty}|x_k - \overline{x}| = 0$ em um dado momento poderemos aplicar o teorema de continuidade do sinal!

$$\psi'(\overline{x}) = 0 \to \psi'(x) = 0$$

se $\psi'(\overline{x}) > 0$ e $x_k \leq \overline{x}$ $\longrightarrow$ $x_{k+1} \leq \overline{x}$

se $\psi'(\overline{x}) > 0$ e $x_k \geq \overline{x}$ $\longrightarrow$ $x_{k+1} \geq \overline{x}$

convergência monotônica

se $\psi'(\overline{x}) < 0$ e $x_k \leq \overline{x}$ $\longrightarrow$ $x_{k+1} \geq \overline{x}$

se $\psi'(\overline{x}) < 0$ e $x_k \geq \overline{x}$ $\longrightarrow$ $x_{k+1} \leq \overline{x}$

convergência oscilante

prova c)

- Caso 2: $\psi'(\overline{x}) = 0$ e $\psi''(x) \neq 0$

Novamente, do teorema do valor médio:

$$\psi'(\xi_k) - \cancel{\psi'(\overline{x})} = \psi''(\theta_k)(\xi_k - \overline{x})$$

$$\psi'(\xi_k) = \psi''(\theta_k)(\xi_k - \overline{x})$$

Mais uma vez, do teorema do valor médio:

ξ_k está entre x_k e x

$$x_{k+1} - \overline{x} = \psi'(\xi_k)(x_k - \overline{x})$$

$$x_{k+1} - \overline{x} = \psi''(\theta_k)(\xi_k - \overline{x})(x_k - \overline{x})$$

≥ 0

se $\psi''(x) > 0$ $\longrightarrow$ $x_{k+1} \geq \overline{x}$

se $\psi''(x) < 0$ $\longrightarrow$ $x_{k+1} \leq \overline{x}$

convergência monotônica

Exemplo (1/2)

- $f(x) = e^{-x} - x$
- Há uma raiz entre (0.5, 0.75)

$x = e^{-x}$ → $\psi(x)$

Precisamos garantir que $|\psi'(x)| < 1$ no intervalo considerado

Qual o máximo $|\psi'(x)|$ em [0.5, 0.75]

$\psi'(x) = -e^{-x}$

$\psi'(0.5) = -0.60653066$

$\psi'(0.75) = -0.472366553$

sempre decrescente!

$|\psi(x)| \leq 0.607 < 1$

Exemplo (2/2)

- Chute inicial: $x_0 = (0.5 + 0.75)/2 = 0.625$

$$x_1 = \psi(x_0) = \psi(0.625) = 0.5326$$

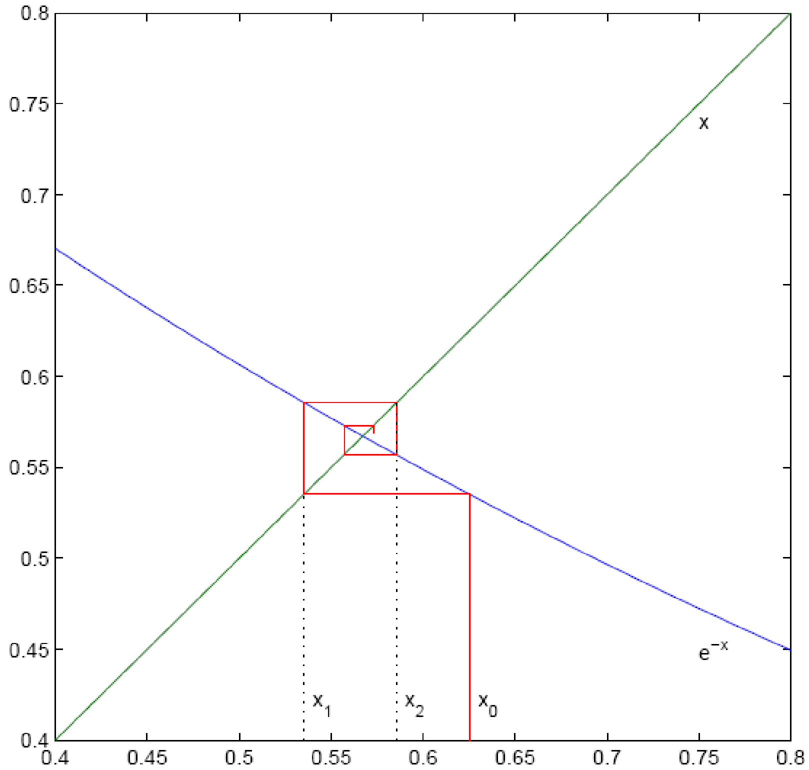
$$x_2 = \psi(x_1) = \psi(0.5326) = 0.5855$$

$$x_3 = \psi(x_2) = \psi(0.5855) = 0.5568$$

$$x_4 = \psi(x_3) = \psi(0.5568) = 0.5730$$

$$x_5 = \psi(x_4) = \psi(0.5730) = 0.5638$$

$$x_5 = \psi(x_5) = \psi(0.5638) = 0.5690$$



Ordem de convergência

- Velocidade com que as iterações de um método se aproximam do valor exato.
- Quanto maior, mais rápido é o método!

- **Definição 3.3 (Franco):** Seja $\{x_k\}$ o resultado da aplicação de um método numérico na iteração k e $e_k = x_k - \overline{x}$ o seu erro. Se existirem um número **p** e uma constante **c** tais que:

$$lim_{k \to \infty} = \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c$$

Então **p** é a ordem de convergência desse método

Ordem de convergência do Método do ponto fixo

- Ainda do teorema do valor médio, temos:

$$x_{k+1} - \overline{x} = \psi'(\xi_k)(x_k - \overline{x})$$

$$\frac{|x_{k+1} - \overline{x}|}{|x_k - \overline{x}|} = \psi'(\xi_k) \leq M$$

p =1