Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Sistemas lineares
Decomposição LU

Alysson M. Costa

24 Oct 2008 . 11:04

Sistemas equivalentes

- Dois sistemas são equivalentes quando admitem a mesma solução.

forma triangular

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

x = 4, y = 2 x = 4, y = 2

Sistemas triangulares inferiores

- Um sistema é triangular inferior se tiver a forma:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 & = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 & = b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 & = b_3 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots & \vdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n & = b_n \end{cases}$$

onde $a_{ii} \neq 0$, i=1,2,...n.

Note que é muito fácil resolver um sistema triangular.

Resolvendo sistemas triangulares inf.

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 & = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 & = b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 & = b_3 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots & \vdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n & = b_n \end{cases}$$

- através da linha 1, resolvemos x_1.
- substituímos x_1 na linha 2.
- resolvemos x_2.
- substituímos x_1 e x_2 na linha 3
- resolvemos x_3
- ...

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,. \end{cases}$$

Para sistemas triangulares superiores

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}\, x_3 \ldots + a_{3n}\, x_n = b_n \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}\, x_n = b_n \end{cases}$$

$a_{ii} \neq 0$, i=1,...,n.

- analogamente:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}, \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}, \quad i = n-1, \ldots, 1\,. \end{cases}$$

Algumas definições de Álgebra Linear

- **Menores principais (A_k):**
São as matrizes definidas pelas *k* primeiras linhas e colunas de A.

ex.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A_3 = A$$

No caso geral:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots n\,.$$

Teorema da decomposição LU

- Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n, e A_k o menor principal k. Assumimos que $\det(A_k) \neq 0$, para k=1,2,...,n-1. Então existe uma única matriz triangular inferior $L=(l_{ij})$, com $l_{11} = l_{22} = ... = l_{nn} = 1$, e uma única matriz triangular superior $U=(u_{ij})$, tal que LU = A. Além disso, $\det(LU) = u_{11}u_{22}...u_{nn}$.

- Resumindo:
  Se $\det(Ak) \neq 0$, k=1,...,n-1 então:
  - L e U existem e são únicas.
  - $\det(LU) = u_{11}u_{22}...u_{nn}$

Teorema da decomposição LU (Prova)

- Franco (123 - 124)

Provamos por indução.

Passo 1) Provamos que o teorema é verdadeiro para n=1.

Passo 2) Provamos que se o teorema é verdadeiro para n=k-1, ele será verdadeiro para n=k.

Passo 1) $A = [a_{11}]$

Os únicos L e U que satisfazem são:

$L = [1]$, $U =[a_{11}]$ -> $LU = a_{11}$

Teorema da decomposição LU (Prova)

Passo 2) Seja a matriz A, de dimensão k. Pela hipótese do teorema, existe a decomposição LU para A_{k-1}.

Vamos escrever a matriz A como:

$$A = \begin{pmatrix} A_{k-1} & r \\ s & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Escrevemos as matrizes:

$$L = \begin{pmatrix} L_{k-1} & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} U_{k-1} & p \\ 0 & u_{kk} \end{pmatrix}$$

Note que L e U satisfazem a forma desejada. Precisamos provar que existem p,m, e u_{kk} unicamente definidos, tais que LU=A

Teorema da decomposição LU (Prova)

De fato, fazendo LU e igualando a A:

$$\begin{pmatrix} L_{k-1}U_{k-1} & L_{k-1}p \\ mU_{k-1} & mp + u_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{k-1} & r \\ s & a_{kk} \end{pmatrix}$$

$\boxed{L_{k-1}U_{k-1} = A_{k-1}}$ → ok, da hipótese da indução.

$$\boxed{\begin{aligned} L_{k-1}p &= r \\ mU_{k-1} &= s \\ mp + u_{kk} &= a_{kk} \end{aligned}}$$

L_{k-1} e U_{k-1} não são singulares, ou A_{k-1} seria singular (pois det(AB) = det(A)*det(B))

$$\begin{aligned} p &= L_{k-1}^{-1}r \\ m &= sU_{k-1}^{-1} \\ u_{kk} &= a_{kk} - mp \end{aligned}$$

Teorema da decomposição LU (Prova)

Além disso, note que:

$$det(A) = \underbrace{det(L)}_{\text{det(L)}} \cdot det(U) = 1 \cdot \underbrace{det(U_{k-1}) \cdot u_{kk}}_{\text{det(U)}}$$

$$det(A) = u_{11}u_{22}\ldots u_{kk}$$

Calculando L e U

- Analisando apenas o resultado do teorema, precisamos calcular L_{k-1}^{-1} e U_{k-1}^{-1} para obter as matrizes L_k e U_k.

$$L = \begin{pmatrix} L_{k-1} & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} U_{k-1} & p \\ 0 & u_{kk} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p &= L_{k-1}^{-1}r \\ m &= sU_{k-1}^{-1} \\ u_{kk} &= a_{kk} - mp \end{aligned}$$

Problema: procedimento longo, onde a cada iteração necessitamos calcular matrizes inversas (cada vez maiores).

Esquema prático

- Há uma maneira mais prática. Observe as estruturas de L e U. Fazendo o produto das duas:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & \bigcirc & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix},$$

Esquema prático

- Igualando a A:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & \bigcirc & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Podemos desenvolver um procedimento iterativo para nos fornecer os valores dos elementos de L e U, começando pela primeira linha de U e pela primeira coluna de L

Esquema prático

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & \bigcirc & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

primeira linha de U

$$\begin{aligned} 1 \cdot u_{11} &= a_{11} \Rightarrow \mathbf{u_{11}} = a_{11}, \\ 1 \cdot u_{12} &= a_{12} \Rightarrow \mathbf{u_{12}} = a_{12}, \\ &\cdots \\ 1 \cdot u_{1n} &= a_{1n} \Rightarrow \mathbf{u_{1n}} = a_{1n}, \\ \Rightarrow \quad \mathbf{u_{1j}} &= a_{1j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

primeira coluna de L

$$\begin{aligned} \ell_{21}\, u_{11} &= a_{21} \Rightarrow \boldsymbol{\ell_{21}} = \frac{a_{21}}{u_{11}}, \\ \ell_{31}\, u_{11} &= a_{31} \Rightarrow \boldsymbol{\ell_{31}} = \frac{a_{31}}{u_{11}}, \\ &\cdots \\ \ell_{n1}\, u_{11} &= a_{n1} \Rightarrow \boldsymbol{\ell_{n1}} = \frac{a_{n1}}{u_{11}}, \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{\ell_{i1}} &= \frac{a_{i1}}{u_{11}}, \quad i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Esquema prático

= já conhecemos

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & \bigcirc & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

segunda linha de U

$$\begin{aligned} \ell_{21}\, u_{12} + u_{22} &= a_{22} \Rightarrow \mathbf{u_{22}} = a_{22} - \ell_{21} u_{12}, \\ \ell_{21}\, u_{13} + u_{23} &= a_{23} \Rightarrow \mathbf{u_{23}} = a_{23} - \ell_{21} u_{13}, \\ &\cdots \\ \ell_{21}\, u_{1n} + u_{2n} &= a_{2n} \Rightarrow \mathbf{u_{2n}} = a_{2n} - \ell_{21} u_{1n}, \\ \Rightarrow \quad \mathbf{u_{2j}} &= a_{2j} - \ell_{21} u_{1j}, \quad j = 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

Esquema prático

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & \bigcirc & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

segunda coluna de L

$$\begin{aligned} \ell_{31}\, u_{12} + \ell_{32} u_{22} &= a_{32} \Rightarrow \boldsymbol{\ell_{32}} = \frac{a_{32} - \ell_{31} u_{12}}{u_{22}}, \\ \ell_{41}\, u_{12} + \ell_{42} u_{22} &= a_{42} \Rightarrow \boldsymbol{\ell_{42}} = \frac{a_{42} - \ell_{41} u_{12}}{u_{22}}, \\ &\cdots \\ \ell_{n1}\, u_{12} + \ell_{n2} u_{22} &= a_{n2} \Rightarrow \boldsymbol{\ell_{n2}} = \frac{a_{n2} - \ell_{n1} u_{12}}{u_{22}}, \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{\ell_{i2}} &= \frac{a_{i2} - \ell_{i2} u_{12}}{u_{22}}, \quad i = 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

Esquema prático

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & \bigcirc & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

De forma geral:

$$\begin{cases} \mathbf{u_{ij}} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}, & i \le j, \\ \boldsymbol{\ell_{ij}} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj}\right) / u_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

$\sum_{j=1}^{k} \equiv 0$ se $k < 1$,

11:43

Exemplo:

Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Verificar se A satisfaz as condições da decomposição LU.

b) Decompor A em LU.

c) Através da decomposição LU, calcular o determinante de A.

d) Resolver o sistema $Ax = b$, onde $b = (0,\ -7,\ -5)^t$, usando a decomposição LU.

11:43

Exemplo - resolução

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a)

$\det(A_1) = 5 \neq 0$

$\det(A_2) = -1 \neq 0$

b)

Primeira linha de U:

$u_{1j} = a_{1j}$

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Primeira coluna de L:

$l_{i1} = a_{i1}/u_{11}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

11:43

Exemplo - resolução

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

Segunda linha de U:

$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j}$

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1/5 & 17/5 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Segunda coluna de L:

$l_{i2} = (a_{i2} - l_{i1}u_{12})/u_{22}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

11:43

Exemplo - resolução

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

Terceira linha de U:

$u_{3j} = a_{3j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1/5 & 17/5 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1/5 & 17/5 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

11:43

Exemplo - resolução

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

det(A)

$= u_{11}u_{22}u_{33}$

$= -13$

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1/5 & 17/5 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

11:43

Exemplo - resolução

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

d)

$$\boxed{\begin{array}{l} Ax = b \\ L\underbrace{Ux}_{y} = b \end{array}}$$

primeiro resolvemos Ly =b:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 3/5 & 1 & \\ 1/5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -26 \end{pmatrix}$$

Depois resolvemos Ux = y

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ & -1/5 & 17/5 \\ 0 & & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$