# Determinação de raízes de polinômios: Método de Briot-Ruffini-Horner

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

13 de maio de 2015

Baseado no livro Cálculo Numérico, de Neide B. Franco

# Cálculo do valor de um polinômio

Em qualquer método iterativo para determinar raízes de um polinômio, é necessário calcular o valor do polinômio $P$ em um dado ponto $x$ e, possivelmente, de suas derivadas.

Por isso, é necessário que este cálculo seja feito da maneira mais precisa e computacionalmente econômica possível.

# Cálculo do valor de um polinômio

Para medir a eficiência de algoritmos para calcular o valor de um polinômio, denotaremos por $\mu$ o tempo computacional de se calcular uma multiplicação e por $\alpha$ o tempo computacional de se calcular uma adição.

Se $P(x)$ é calculado da maneira tradicional, usando a fórmula

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

devemos calcular as potências de $x$, fazendo $x^k = x(x^{k-1})$. O tempo computacional gasto com estas operações é $(n-1)\mu$.

# Cálculo do valor de um polinômio

O cálculo dos termos da forma $a_k x^k$ requerem $n\mu$.

A soma dos termos requerem $n\alpha$.

Ou seja, o tempo computacional total gasto para calcular $P(x)$ é $(2n-1)\mu + n\alpha$.

Além disso, se for necessário calcular $P'(x)$, será necessária, aproximadamente, a mesma quantidade de tempo computacional.

# Método de Briot-Ruffini-Horner

O Método de Briot-Ruffini-Horner consiste em calcular o valor de $P(x)$ e $P'(x)$ (e, possivelmente, derivadas de ordens superiores) usando a seguinte representação de $P(x)$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$(((\ldots(a_n x + a_{n-1})x + \ldots)x + a_2)x + a_1)x + a_0.$$

Note que, usando esta maneira alternativa de descrever $P(x)$, o tempo computacional necessário para o cálculo de $P(x)$ (e $P'(x)$) é, apenas, $n\mu + n\alpha$.

Uma forma de descrever esta maneira de calcular o valor de $P(x)$ é, dados os coeficientes $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$, calcular $b_n, b_{n-1}, ..., b_2, b_1, b_0$ da seguinte forma:

$$b_n = a_n,$$

$$b_{n-k} = x b_{n-k+1} + a_{n-k},$$

para $k = 1, 2, ..., n$.

Desta forma, para um dado $x$, $P(x) = b_0$. Ou seja, se $\bar{x}$ é uma raiz de $P$, temos que $b_0 = P(\bar{x}) = 0$.

Para calcular a derivada de $P(x)$, podemos aplicar o mesmo procedimento, usando os valores $b_k$ no lugar de $a_k$.

Neste caso, temos

$$c_n = b_n,$$

$$c_{n-k} = xc_{n-k+1} + b_{n-k},$$

para $k = 1, 2, ..., n-1$.

# Método de Briot-Ruffini-Horner

Note que,

$$b'_n = (a_n)' = 0,$$

$$b'_{n-k} = (xb_{n-k+1} + a_{n-k})' = xb'_{n-k+1} + b_{n-k+1},$$

para $k = 1, 2, ..., n$.

# Método de Briot-Ruffini-Horner

Além disso,

$$b'_{n-1} = xb'_n + b_n = b_n = c_n,$$

$$b'_{n-2} = xb'_{n-1} + b_{n-1} = xc_n + b_{n-1} = c_{n-1},$$

e assim por diante.

Ou seja, $c_k = b'_{k-1}$. Portanto, $P'(x) = (b_0)' = c_1$.

# Método de Briot-Ruffini-Horner

Dado um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, para calcular $P(z)$, fazemos:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
 & \downarrow & + & + & \ldots & + & + & + \\
z & & zb_n & zb_{n-1} & \ldots & zb_3 & zb_2 & zb_1 \\
\hline
 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
 & \downarrow & + & + & \ldots & + & + & \\
z & & zc_n & zc_{n-1} & \ldots & zc_3 & zc_2 & \\
\hline
 & c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_2 & c_1 &
\end{array}
$$

Ao final da construção desta tabela, temos $P(z) = b_0$ e $P'(z) = c_1$.

# Método de Briot-Ruffini-Horner

Quando calculamos apenas o valor de $P(z)$ usando o esquema anterior, temos o Método de Briot-Ruffini. O Método de Briot-Ruffini-Horner fornece os valores de $\frac{P'(z)}{1!}$, $\frac{P''(z)}{2!}$, $\frac{P'''(z)}{3!}$ e assim por diante.

Se quisermos aplicar o Método de Newton para encontrar uma raiz de um polinômio $P$, podemos usar o Método de Briot-Ruffini-Horner para calcular $P(x_k)$ e $P'(x_k)$ de maneira eficiente.

Desta forma, a iteração que tem a forma $x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)}$, pode ser escrita como

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b_0(x_k)}{c_1(x_k)}.$$

Se $z$ for uma raiz de um polinômio $P$, os coeficientes $b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0$ obtidos pelo Método de Briot-Ruffini-Horner são tais que

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + ... + b_3 x^2 + b_2 x + b_1 = \frac{P(x)}{x-z}.$$

Para verificar esta expressão, note que

$$(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + ... + b_3 x^2 + b_2 x + b_1)(x - z) =$$

$$b_n x^n + (b_{n-1} - z b_n) x^{n-1} + ... + (b_2 - z b_3) x^2 + (b_1 - z b_2) x + (b_0 - z b_1) =$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = P(x).$$

# Método de Briot-Ruffini-Horner

Portanto, qualquer raiz de $Q$ é também raiz de $P$.

Ou seja, ao utilizar um método para encontrar uma raiz $z$ de $P$, podemos construir o polinômio $Q$, de grau $n-1$, e aplicar o mesmo método para encontrar uma raiz de $Q$.

Seguindo este procedimento, podemos encontrar todas as raízes de $P$.

# Exemplo

Considere o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 0.85x - 1.7$.

Vamos utilizar o Método de Newton, com precisão $10^{-2}$ e ponto inicial $x_0 = 0.9$, para encontrar uma raiz de $P$.

Usaremos o Método de Briot-Ruffini-Horner para calcular os valores de $P(x_k)$ e $P'(x_k)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2.0 | −0.85 | −1.700 |
| | ↓ | + | + | + |
| 0.9 | | 0.9 | 2.61 | 1.584 |
| | 1 | 2.9 | 1.76 | −0.116 |
| | ↓ | + | + | |
| 0.9 | | 0.9 | 3.42 | |
| | 1 | 3.8 | 5.18 | |

O ponto $x_1$ é dado por

$$x_1 = x_0 - \frac{b_0(x_0)}{c_1(x_0)} = 0.9 - \frac{-0.116}{5.18} = 0.9224.$$

O erro obtido é $\left|\frac{x_1 - x_0}{x_1}\right| \approx 0.02 > 10^{-2}$.

# Exemplo

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2.0000 | −0.8500 | −1.7000 |
| | $\downarrow$ | + | + | + |
| 0.9224 | | 0.9224 | 2.6956 | 1.7024 |
| | 1 | 2.9224 | 1.8456 | 0.0024 |
| | $\downarrow$ | + | + | |
| 0.9224 | | 0.9224 | 3.5464 | |
| | 1 | 3.8448 | 5.3920 | |

O ponto $x_1$ é dado por

$$x_2 = x_1 - \frac{b_0(x_1)}{c_1(x_1)} = 0.9224 - \frac{-0.0024}{5.3920} = 0.9220.$$

O erro obtido é $\left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \approx 0.0004 < 10^{-2}$.

# Exemplo

Como a precisão pedida foi atingida, nossa raiz aproximada de $P$ é 0.922.

Podemos construir o polinômio $Q$ tal que $Q(x) = \frac{P(x)}{(x-0.922)}$ (lembrando que esta raiz é aproximada).

Para isso, usamos o Método de Briot-Ruffini mais uma vez:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2.000 & -0.8500 & -1.7000 \\
\hline
 & \downarrow & + & + & + \\
0.922 & & 0.922 & 2.6941 & 1.7003 \\
\hline
 & 1 & 2.922 & 1.8441 & 0.0003
\end{array}
$$

Assim, $Q(x) = x^2 + 2.922x + 1.8441$. Note que podemos obter as duas raízes restantes de $P$ resolvendo a equação de segundo grau $Q(x) = 0$.