

Sistemas Lineares

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

4 de março de 2015

Uma grande variedade de problemas da engenharia pode ser resolvida através da análise linear, entre eles podemos citar:

- determinação do potencial em redes elétricas,
- cálculo da tensão em estruturas metálicas da construção civil,
- etc.

O problema matemático em todos estes casos se reduz a resolver um sistema de equações simultâneas.

A maioria dessas aplicações envolve um conjunto de equações lineares.

Uma equação é linear se cada termo contém não mais do que uma variável e cada variável aparece na primeira potência.

Exemplos:

- $3x + 4y - 10z = 3$: é linear;
- $xy - 3z = 7$: não é linear;
- $x^3 + y - z = 5$: não é linear.

Considere n equações lineares e n variáveis (incógnitas). Vamos nos referir a elas como um **sistema linear de ordem n** .

Uma solução para este sistema de equações consiste de valores para as n variáveis tais que, quando esses valores são substituídos nas equações, todas são satisfeitas simultaneamente.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y - z = 1, \\ 2x + 3y - 4z = 9. \end{cases}$$

A solução deste sistema linear é: $x = 1, y = 1$ e $z = -1$.

Um sistema linear com m equações e n variáveis é escrito usualmente na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

em que a_{ij} são os coeficientes, x_j são as variáveis e b_j são as constantes.

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como $Ax = b$.

Dado um sistema linear $Ax = b$, nosso objetivo é encontrar uma solução para o sistema, ou seja, encontrar x tal que $Ax = b$.

Classificação de um sistema linear

Um sistema linear pode ser:

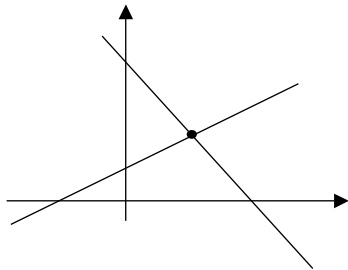
- **Sistema possível** ou consistente: é todo sistema que possui pelo menos uma solução, ele pode ser:
 - **Determinado**: se admite uma única solução;
 - **Indeterminado**: se admite mais de uma solução.
- **Sistema impossível** ou inconsistente: é todo sistema que não admite solução.

Classificação de um sistema linear

Exemplo: sistema linear com solução única. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x - 3y = -2. \end{cases}$$

A solução deste sistema é $x = (11)^T$.

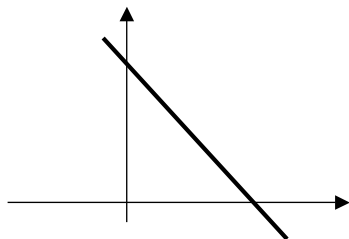


Classificação de um sistema linear

Exemplo: sistema linear com infinitas soluções. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x + 2y = 6. \end{cases}$$

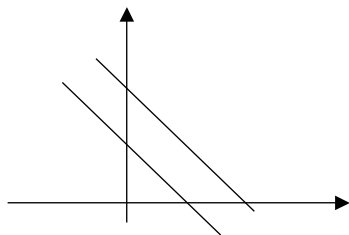
A solução deste sistema é $x = (\alpha 3 - 2\alpha)^T$, com $\alpha \in R$.



Classificação de um sistema linear

Exemplo: sistema linear sem solução. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x + 2y = 2. \end{cases}$$



Vamos estudar métodos numéricos para resolver sistemas lineares de ordem n , que tenham solução única.

Observe que tais sistemas são aqueles em que a matriz A dos coeficientes é não singular, ou seja,

$$\det(A) \neq 0.$$

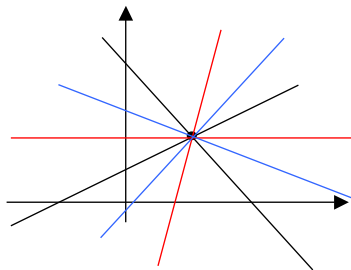
Os métodos numéricos para a solução de sistemas lineares são divididos principalmente em dois grupos:

- **Métodos Exatos:** forneceriam uma solução exata em um número finito de operações, senão fossem os erros de arredondamento;
- **Métodos Iterativos:** são aqueles que permitem obter uma solução com uma dada precisão através de um processo infinito convergente.

Sistemas Lineares Equivalentes

Dois **sistemas lineares** são ditos **equivalentes** quando admitem a **mesma solução**.

Exemplo:



Solução de sistemas triangulares

Um **sistema linear** de ordem n é dito **triangular inferior** se ele tiver a forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2, \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = b_n. \end{cases}$$

Um **sistema linear** de ordem n é dito **triangular superior** se ele tiver a forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ & a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = b_2, \\ & \vdots & \\ & a_{nn}x_n & = b_n. \end{cases}$$

Solução de sistemas triangulares

Ambos podem ser facilmente resolvidos. A **solução do sistema triangular inferior** é dada por

- $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}},$
- $x_k = \frac{b_k - (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{k,k-1}x_{k-1})}{a_{kk}},$ para $k = 2, \dots, n.$

A **solução do sistema triangular superior** é dada por

- $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}},$
- $x_k = \frac{b_k - (a_{k,k+1}x_{k+1} + a_{k,k+2}x_{k+2} + \dots + a_{k,n}x_n)}{a_{kk}},$ para $k = n - 1, \dots, 1.$

Número de operações: $O(n^2).$