Autovalores e Autovetores

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

27 de março de 2015

Baseado no livro Cálculo Numérico, de Neide B. Franco.

Introdução

Definição: um escalar $\lambda \in \boldsymbol{R}$ é um autovalor da matriz A, se existe um vetor não nulo $v \in \boldsymbol{R}^n$, tal que $Av = \lambda v$.

Todo vetor v que satisfaz essa relação é chamado de autovetor de A correspondente ao autovalor λ.

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Temos que

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Polinômio característico

Se v é um autovetor de A associado a um autovalor λ, temos que $Av = \lambda v$. Ou seja, $Av - \lambda v = 0 \Rightarrow$

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Se $\det(A - \lambda I) \neq 0$, então o sistema linear acima tem uma única solução $v = 0$.

Para calcular um autovetor v, precisamos que $v \neq 0$, com $Av = \lambda v$.

Polinômio característico

Assim, vamos impor que $det(A - \lambda I) = 0$, ou seja,

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0,$$

com $P(\lambda)$ um polinômio em λ de grau n.

Os autovalores de A são as raízes deste polinômio.

$P(\lambda)$ é chamado de **polinômio característico** da matriz A.

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. O polinômio característico de A é dado por

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

As raízes de P são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$.

Propriedades

Seja $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$*. Se* (λ, v) *é um par autovalor-autovetor da matriz* A*, então* $(\lambda + \alpha, v)$ *é um par autovalor-autovetor da matriz* $A + \alpha I$*, com* I *a matrix identidade de ordem* n*.*

Demonstração: Se (λ, v) é um par autovalor-autovetor da matriz A, então $Av = \lambda v$. Como

$$(A + \alpha I)v = Av + \alpha v,$$

temos que

$$(A + \alpha I)v = \lambda v + \alpha v = (\lambda + \alpha)v.$$

Ou seja, $(\lambda + \alpha, v)$ é um par autovalor-autovetor da matriz $A + \alpha I$.

Seja $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$. A é uma matriz singular se, e somente se, 0 é um de seus autovalores.

Demonstração: A é singular se, e somente se, existe um vetor v não-nulo tal que

$$Av = 0 = 0v.$$

Como v é não-nulo, v é autovetor de A e 0 é o autovalor de A associado a v.

Seja $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ *não-singular e* (λ_i, v_i), $i = 1, ..., n$, *com* $\lambda_i \in \boldsymbol{R}$, *seus pares autovalor-autovetor. Então* $(\frac{1}{\lambda_i}, v_i)$, $i = 1, ..., n$, *são os pares autovalor-autovetor de* A^{-1}.

Demonstração: Se (λ_i, v_i) é um par autovalor-autovetor da matriz A, então

$$Av_i = \lambda_i v_i \Rightarrow A^{-1}Av_i = \lambda_i A^{-1} v_i \Rightarrow$$

$$v_i = \lambda_i A^{-1} v_i \Rightarrow \frac{1}{\lambda_i} v_i = A^{-1} v_i.$$

Ou seja, $(\frac{1}{\lambda_i}, v_i)$ é um par autovalor-autovetor da matriz A^{-1}.

Objetivo

Estudar métodos numéricos para a determinação de autovalores e seus correspondentes autovetores de uma matriz A de ordem n.

Existem métodos numéricos que determinam

1. o polinômio característico;
2. alguns autovalores;
3. todos os autovalores.