Determinação numérica de autovalores e autovetores: Método das Potências

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

27 de março de 2015

Baseado no livro Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Método das Potências

O Método das Potências é um método iterativo para determinar numericamente o maior autovalor em módulo de uma matriz.

Com uma pequena modificação, este método também pode ser usado para determinar outros autovalores de uma matriz.

Uma vantagem deste método é que, além de determinar um autovalor, ele determina também o autovetor associado.

Método das Potências

Para que o Método das Potências encontre uma aproximação para o maior autovalor em módulo (e autovetor associado) de uma matriz $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$, supomos que A tem n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ e um conjunto de autovetores associados $\{v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}\}$ linearmente independente.

Além disso, supomos que A tenha somente um autovalor λ_1 que seja maior em módulo. Ou seja, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq ... \geq |\lambda_n| \geq 0$.

Considere, por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ela possui autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 2$. Os autovetores associados são $v^{(1)} = (0, 0, 1)^T$, $v^{(2)} = (1, 0, 0)^T$ e $v^{(3)} = (1, 0, 0)^T$. Note que os autovetores não são linearmente independentes.

Quando os autovetores de uma matriz não são linearmente independentes, o Método das Potências ainda pode encontrar o autovalor de maior módulo, mas não há garantia de isso aconteça.

Método das Potências

Considere uma matriz $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$, com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ e um conjunto de autovetores associados $\{v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}\}$ linearmente independente.

Seja $x \in \boldsymbol{R}^n$ um vetor arbitrário. Como $\{v^{(j)} | j = 1, ..., n\}$ é linearmente independente, temos que

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v^{(j)}.$$

Método das Potências

Multiplicando ambos os lados da equação por $A, A^2, ..., A^k$, temos

$$Ax = A\sum_{j=1}^{n} \beta_j v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j v^{(j)},$$

$$A^2 x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j A v^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^2 v^{(j)},$$

$$\vdots$$

$$A^k x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^k v^{(j)}. \tag{1}$$

Método das Potências

Se isolarmos λ_1^k em cada parcela do lado direito da equação (1), temos

$$A^k x = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k v^{(j)}.$$

Como $|\lambda_1| > |\lambda_j|$, para $j = 2, ..., n$, temos que

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$$

e, assim,

$$\lim_{k\to\infty} A^k x = \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k \beta_1 v^{(1)}. \tag{2}$$

Se $\beta_1 \neq 0$, o limite (2) converge quando $|\lambda_1| < 1$ e diverge quando $|\lambda_1| > 1$.

Podemos fazer uma mudança na escala das potências de $A^k x$ para garantir que o limite (2) seja finito e não nulo.

A mudança de escala começa com a escolha de x sendo um vetor tal que $\|x^{(0)}\|_\infty = 1$ e escolhendo uma componente p_0 de x tal que

$$x_{p_0}^{(0)} = 1 = \|x^{(0)}\|_\infty.$$

Defina $y^{(1)} = Ax^{(0)}$ e $\mu^{(1)} = y^{(1)}_{p_0}$. Então,

$$\mu^{(1)} = y^{(1)}_{p_0} = \frac{y^{(1)}_{p_0}}{x^{(0)}_{p_0}} = \frac{\beta_1 \lambda_1 v^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \lambda_j v^{(j)}_{p_0}}{\beta_1 v^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j v^{(j)}_{p_0}} =$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\beta_1 v^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j (\lambda_j / \lambda_1) v^{(j)}_{p_0}}{\beta_1 v^{(1)}_{p_0} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j v^{(j)}_{p_0}} \right).$$

Método das Potências

Seja p_1, $1 \leq p_1 \leq n$, o menor índice tal que

$$|y^{(1)}_{p_1}| = \|y^{(1)}\|_\infty.$$

Defina $x^{(1)}$ como

$$x^{(1)} = \frac{1}{y^{(1)}_{p_1}} y^{(1)} = \frac{1}{y^{(1)}_{p_1}} A x^{(0)}.$$

Note que

$$x^{(1)}_{p_1} = 1 = \|x^{(1)}\|_\infty.$$

Defina, agora,

$$y^{(2)} = Ax^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}} A^2 x^{(0)}$$

e

$$\mu^{(2)} = y_{p_1}^{(2)} = \frac{y_{p_1}^{(2)}}{x_{p_1}^{(1)}} = \frac{\left(\beta_1 \lambda_1^2 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \lambda_j^2 v_{p_1}^{(j)}\right) / y_{p_1}^{(1)}}{\left(\beta_1 \lambda_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \lambda_j v_{p_1}^{(j)}\right) / y_{p_1}^{(1)}} =$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\beta_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j (\lambda_j / \lambda_1)^2 v_{p_1}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j (\lambda_j / \lambda_1) v_{p_1}^{(j)}} \right).$$

Método das Potências

Seja p_2, $1 \leq p_2 \leq n$, o menor índice tal que

$$|y_{p_2}^{(2)}| = \|y^{(2)}\|_\infty.$$

Defina

$$x^{(2)} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)}} y^{(2)} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)}} A x^{(1)} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)} y_{p_1}^{(1)}} A^2 x^{(0)}.$$

De modo análogo, defina a sequência de vetores $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ e $\{y^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ e uma sequência de escalares $\{\mu^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ da sequinte forma:

$$y^{(m)} = Ax^{(m-1)},$$

$$\mu^{(m)} = y_{p_{m-1}}^{(m)} = \lambda_1 \left(\frac{\beta_1 v_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j/\lambda_1)^m \beta_j v_{p_{m-1}}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j/\lambda_1)^{m-1} \beta_j v_{p_{m-1}}^{(j)}} \right) \tag{3}$$

e

$$x^{(m)} = \frac{1}{y_{p_m}^{(m)}} y^{(m)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{m} y_{p_k}^{(k)}} A^m x^{(0)},$$

onde cada índice p_m é usado para representar o menor índice que satisfaz $|y_{p_m}^{(m)}| = \|y^{(m)}\|_{\infty}$.

Método das Potências

Olhando para a equação (3), podemos notar que $\lim_{k \to \infty} \mu^{(m)} = \lambda_1$, já que $|\lambda_j/\lambda_1| < 1$, para todo $j = 2, ..., n$, desde que $x^{(0)}$ seja escolhido de modo que $\beta_1 \neq 0$.

Além disso, a sequência $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ converge para o autovetor associado a λ_1 que tem norma infinito igual a um.

Método das Potências

A desvantagem do Método das Potências é que não se sabe, em princípio:

- Se uma matriz possui apenas um autovalor dominante.
- Se os autovetores da matriz são linearmente independentes.
- Se um dado vetor $x^{(0)}$ é tal que sua representação na base formada pelos autovetores da matriz possui $\beta_1 \neq 0$.

Algoritmo

Método das Potências: dados uma matriz $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, um vetor não nulo $x \in \boldsymbol{R}^n$, uma tolerância ϵ e um número máximo de iterações $MAXIT$, calcula μ (uma aproximação do maior autovalor em módulo de A) e uma aproximação do autovetor x, com $\|x\|_\infty = 1$, associado ao autovalor aproximado por μ, ou emite uma mensagem de erro.

Passo 1: Faça $k \leftarrow 1$.

Passo 2: Calcule p, $1 \leq p \leq n$, o menor índice tal que $|x_p| = \|x\|_\infty$.

Passo 3: Faça $x \leftarrow \frac{1}{|x_p|}x$.

Algoritmo

Passo 4: Enquanto $(k \leq MAXIT)$, execute os passos 5 a 10:

Passo 5: Faça $y \leftarrow Ax$.

Passo 6: Faça $\mu \leftarrow y_p$.

Passo 7: Calcule p, $1 \leq p \leq n$, o menor índice tal que $|y_p| = \|y\|_\infty$.

Passo 8: Se $y_p = 0$, então

devolva 0 como autovalor, x como autovetor e pare.

Passo 9: Se $\|x - \frac{1}{|y_p|} y\|_\infty < \epsilon$, então

devolva μ como autovalor, $\frac{1}{|y_p|} y$ como autovetor e pare.

Passo 10: Faça $x \leftarrow \frac{1}{|y_p|} y$ e $k \leftarrow k + 1$.

Passo 11: Escreva "número máximo de iterações atingido" e pare.

Exemplo

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Seus autovalores são $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 2$.

Assim, seus autovetores são linearmente independentes e, dependendo da escolha de $x^{(0)}$, o Método das Potências irá convergir.

Exemplo

Tome $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Assim, $p = 1$ e

$$y^{(1)} = Ax^{(0)} = (10, 8, 1)^T.$$

Temos $\mu^{(1)} = y_p = y_1 = 10$, $\|y^{(1)}\|_\infty = 10$, e

$$x^{(1)} = \frac{1}{10} y^{(1)} = (1, 0.8, 0.1)^T.$$

Na tabela a seguir temos os valores obtidos aplicando o Método das Potências.

Exemplo

k	$x^{(k)}$	$\mu^{(k)}$
0	$(+1.000000, +1.000000, +1.000000)^T$	
1	$(+1.000000, +0.800000, +0.100000)^T$	10.000000
2	$(+1.000000, +0.750000, -0.111000)^T$	7.200000
3	$(+1.000000, +0.730769, -0.188803)^T$	6.500000
4	$(+1.000000, +0.722200, -0.220850)^T$	6.230769
5	$(+1.000000, +0.718182, -0.235915)^T$	6.111000
6	$(+1.000000, +0.716216, -0.243095)^T$	6.054546
7	$(+1.000000, +0.715247, -0.246588)^T$	6.027027
8	$(+1.000000, +0.714765, -0.248306)^T$	6.013453
9	$(+1.000000, +0.714525, -0.249157)^T$	6.006711
10	$(+1.000000, +0.714405, -0.249579)^T$	6.003352
11	$(+1.000000, +0.714346, -0.249790)^T$	6.001675
12	$(+1.000000, +0.714316, -0.249895)^T$	6.000837