Determinação numérica de autovalores e autovetores: Método das Potências Inversas

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

27 de março de 2015

Método das Potências Inversas

Vimos que o Método das Potências pode ser usado para determinar o maior autovalor em módulo de uma matriz A, e o autovetor associado.

Se fizermos uma pequena modificação no método, podemos calcular o menor autovalor em módulo de uma matriz A, e o autovetor associado.

Método das Potências Inversas

Considere uma matriz A, com autovalores $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n| > 0$, e autovetores associados $v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}$.

Como os módulos dos autovalores são estritamente positivos, a matriz A é inversível.

Método das Potências Inversas

Além disso, para todo j, temos que

$$Av^{(j)} = \lambda_j v^{(j)} \Rightarrow A^{-1}Av^{(j)} = \lambda_j A^{-1}v^{(j)} \Rightarrow$$

$$v^{(j)} = \lambda_j A^{-1}v^{(j)} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_j}v^{(j)} = A^{-1}v^{(j)}.$$

Ou seja, se λ_j é autovalor de A, com vetor associado $v^{(j)}$, temos que $\frac{1}{\lambda_j}$ é autovalor de A^{-1}, com vetor associado $v^{(j)}$.

Método das Potências Inversas

Note que os autovalores de A^{-1} são dados por $\left|\frac{1}{\lambda_n}\right| \geq \left|\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right| \geq \ldots \geq \left|\frac{1}{\lambda_1}\right| > 0$, com autovetores associados $v^{(n)}, v^{(n-1)}, \ldots, v^{(n)}$.

Isso significa que, se usarmos o Método das Potências para calcular o maior autovalor em módulo de A^{-1}, calcularemos o inverso do menor autovalor em módulo de A.

Método das Potências Inversas

O Método das Potências modificado para calcular o menor autovalor em módulo de A é chamado de Método das Potências Inversas.

No Método das Potências Inversas, no entanto, não calculamos a matriz A^{-1}. Em vez disso, no passo em que deveríamos calcular $y = A^{-1}x$, resolvemos o sistema $Ay = x$, em y.

Como vários sistemas serão resolvidos mantendo a matriz A e trocando apenas o valor de x, calculamos a Decomposição LU de A no início do método.

Método das Potências Inversas: dados uma matriz $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$, um vetor não nulo $x \in \boldsymbol{R}^n$, uma tolerância ϵ e um número máximo de iterações $MAXIT$, calcula μ (uma aproximação do menor autovalor em módulo de A) e uma aproximação do autovetor x, com $\|x\|_\infty = 1$, associado ao autovalor aproximado por μ, ou emite uma mensagem de erro.

Passo 1: Faça $k \leftarrow 1$.

Passo 2: Calcule p, $1 \leq p \leq n$, o menor índice tal que $|x_p| = \|x\|_\infty$.

Passo 3: Faça $x \leftarrow \frac{1}{|x_p|} x$.

Passo 4: Calcule as matrizes triangular inferior (L) e superior (U) tais que

$A = LU$.

Algoritmo

Passo 5: Enquanto ($k \leq MAXIT$), execute os passos 6 a 11:

Passo 6: Resolva o sistema $LUy = x$, para y.

Passo 7: Faça $\mu \leftarrow y_p$.

Passo 8: Calcule p, $1 \leq p \leq n$, o menor índice tal que $|y_p| = \|y\|_\infty$.

Passo 9: Se $y_p = 0$, então

Escreva "matriz singular" e pare.

Passo 10: Se $\|x - \frac{1}{|y_p|} y\|_\infty < \epsilon$, então

devolva $\frac{1}{\mu}$ como autovalor, $\frac{1}{|y_p|} y$ como autovetor e pare.

Passo 11: Faça $x \leftarrow \frac{1}{|y_p|} y$ e $k \leftarrow k + 1$.

Passo 12: Escreva "número máximo de iterações atingido" e pare.

Método das Potências Inversas

Uma propriedade de autovalores é que, se uma matriz A possui autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, com autovetores associados $v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}$, a matriz $A - \alpha I$ possui autovalores $\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, ..., \lambda_n - \alpha$, com os mesmos autovetores associados.

Usando este fato, ao aplicarmos o Método das Potências Inversas à matriz $A - \alpha I$, podemos determinar o autovalor de A mais próximo do valor α.

Exemplo

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Seus autovalores são $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 2$.

Assim, seus autovetores são linearmente independentes e, dependendo da escolha de $x^{(0)}$, o Método das Potências Inversas irá convergir.

Exemplo

A decomposição LU de A é dada por

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = LU.$$

Exemplo

Tome $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Assim, $p = 1$ e

$$Ay^{(1)} = x^{(0)} = \left(-\frac{1}{18}, \frac{1}{18}, \frac{17}{36}\right)^T.$$

Temos $\mu^{(1)} = y_p = y_1 = -\frac{1}{18}$, $\|y^{(1)}\|_\infty = \frac{17}{36}$ e

$$x^{(1)} = \frac{36}{17} y^{(1)} = \left(-\frac{2}{17}, \frac{2}{17}, 1\right)^T.$$

Na tabela a seguir temos os valores obtidos aplicando o Método das Potências Inversas.

Exemplo

k	$x^{(k)}$	$\mu^{(k)}$	$\frac{1}{\mu^{(k)}}$
0	$(+1.0000, +1.0000, +1.0000)^T$		
1	$(-0.1176, +0.1176, +1.0000)^T$	-0.0556	-18.0000
2	$(-0.4286, -0.1429, +1.0000)^T$	0.4118	2.4286
3	$(-0.4950, -0.2178, +1.0000)^T$	0.4008	2.4950
4	$(-0.4634, -0.2195, +1.0000)^T$	0.4059	2.4634
5	$(-0.3922, -0.1912, +1.0000)^T$	0.4180	2.3922
6	$(-0.3109, -0.1536, +1.0000)^T$	0.4327	2.3109
7	$(-0.2348, -0.1167, +1.0000)^T$	0.4475	2.2348
8	$(-0.1711, -0.0853, +1.0000)^T$	0.4606	2.1711
9	$(-0.1214, -0.0606, +1.0000)^T$	0.4714	2.1214
10	$(-0.0845, -0.0422, +1.0000)^T$	0.4797	2.0845
11	$(-0.0580, -0.0290, +1.0000)^T$	0.4859	2.0580
12	$(-0.0395, -0.0197, +1.0000)^T$	0.4903	2.0395
13	$(-0.0267, -0.0133, +1.0000)^T$	0.4934	2.0267
14	$(-0.0179, -0.0090, +1.0000)^T$	0.4956	2.0179
15	$(-0.0120, -0.0060, +1.0000)^T$	0.4970	2.0120
16	$(-0.0081, -0.0040, +1.0000)^T$	0.4980	2.0081