Determinação de raízes de funções: Método do Ponto Fixo

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

27 de março de 2015

Baseado no livro Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Determinação de raízes de funções

Estamos interessados em encontrar uma solução para a equação

$$\boxed{f(x) = 0,}$$

para uma dada função $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$.

Ponto fixo

Vamos estudar, agora, o Método do Ponto Fixo, que é usado para determinar raízes de funções não-lineares.

Dizemos que um número p é um ponto fixo de uma função g se $g(p) = p$.

Ponto fixo

Os problemas de encontrar um ponto fixo de uma função e de encontrar uma de suas raízes são equivalentes, no seguinte sentido:

Dado um problema de determinação de raiz $f(p) = 0$, podemos definir funções g com um ponto fixo em p de diversas formas. Por exemplo, $g(x) = x - f(x)$ ou $g(x) = x + 3f(x)$.

Reciprocamente, se a função g tiver um ponto fixo em p, a função definida por $f(x) = x - g(x)$ terá um zero em p.

Ponto fixo

Primeiramente, vamos estudar o problema de encontrar um ponto fixo de uma função e determinar quando este ponto fixo existe e como determiná-lo com uma dada precisão.

Exemplo: A função $g(x) = x^2 - 2$, para $-2 \leq x \leq 3$, tem pontos fixos em $x = -1$ e $x = 2$, já que $g(-1) = 1 - 2 = -1$ e $g(2) = 4 - 2 = 2$.

Ponto fixo

O teorema a seguir estabelece condições suficientes para a existência e unicidade de um ponto fixo.

Teorema 1: *Se* $g \in \mathcal{C}[a, b]$ *e* $g(x) \in [a, b]$, *para todo* $x \in [a, b]$, g *terá um ponto fixo em* $[a, b]$.

Além disso, se $g'(x)$ *existir em* (a, b) *e existir uma constante positiva* $c < 1$ *tal que* $|g'(x)| \leq c$, *para todo* $x \in (a, b)$, *então o ponto fixo em* $[a, b]$ *será único.*

Ponto fixo - exemplo

Exemplo: Seja $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ em $[-1, 1]$.

O Teorema do Valor Extremo determina que o mínimo absoluto de g ocorre em $x = 0$ e $g(0) = -\frac{1}{3}$. De modo análogo, o máximo absoluto de g ocorre em $x = \pm 1$ e tem o valor $g(\pm 1) = 0$.

Além disso, g é contínua e

$$|g'(x)| = \left|\frac{2x}{3}\right| \leq \frac{2}{3},$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

Ponto fixo - exemplo

Portanto, g satisfaz as hipóteses do Teorema 1 e, por isso, tem um único ponto fixo em $[-1, 1]$.

Neste exemplo, o único ponto fixo p, no intervalo $[-1, 1]$, pode ser determinado algebricamente:

$$p = g(p) = \frac{p^2 - 1}{3} \Rightarrow p^2 - 3p - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação, temos $p_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ e $p_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Como estamos interessados apenas no intervalo $[-1, 1]$, temos que o ponto fixo p é dado por $p = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Ponto fixo - exemplo

Observe que g também possui um único ponto fixo $p = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, no intervalo $[3, 4]$.

No entanto, $g(4) = 5$ e $g'(4) = \frac{8}{3} > 1$. Ou seja, g não satisfaz as hipóteses do Teorema 1 em $[3, 4]$.

Portanto, as hipóteses do Teorema 1 são condições suficientes, mas não necessárias, para garantir a existência e unicidade de um ponto fixo de uma função em um dado intervalo.

Método do Ponto Fixo

Para determinar a aproximação do ponto fixo de uma função g, escolhemos uma aproximação inicial p_0 e geramos a sequência $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$, definindo $p_k = g(p_{k-1})$, para $k \geq 1$.

Se a sequência convergir para p e g for contínua, temos que

$$\boxed{p = \lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty} g(p_{k-1}) = g\left(\lim_{k\to\infty} p_{k-1}\right) = g(p)}$$

Ou seja, será encontrada uma solução para o problema $g(x) = x$.

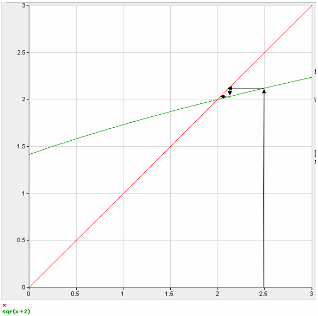

Figura: Fonte: aula prof. Alysson Costa

Método do Ponto Fixo: dados uma aproximação inicial p_0, uma tolerância $TOL > 0$ e o número máximo de iterações $MAXIT$, devolve a solução aproximada p ou uma mensagem de erro.

Passo 1: Faça $k \leftarrow 1$.

Passo 2: Enquanto $k \leq MAXIT$, execute os passos 3 a 6:

Passo 3: Faça $p \leftarrow g(p_0)$.

Passo 4: Se $|p - p_0| < TOL$ ou $\frac{|p-p_0|}{|p|} < TOL$ ou $|f(p)| < TOL$,

então devolva p como solução e pare.

Passo 5: Faça $p_0 \leftarrow p$.

Passo 6: Faça $k \leftarrow k + 1$.

Passo 7: Escreva "o método falhou após $MAXIT$ iterações" e pare.

Método do Ponto Fixo - exemplo

A equação $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tem uma única raiz em $[1, 2]$.

Existem várias maneiras pelas quais a equação pode ser manipulada para obter a forma de ponto fixo $x = g(x)$, como, por exemplo,

- $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$;
- $x = g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$;
- $x = g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$;
- $x = g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$;
- $x = g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$.

Método do Ponto Fixo - exemplo

Com $p_0 = 1.5$, a tabela a seguir mostra os resultados da aplicação do Método do Ponto Fixo para as 5 opções de g. A raiz verdadeira é 1.365230013.

k	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
0	1.500	1.5000	1.500000000	1.500000000	1.500000000
1	-0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.700	$\sqrt{-8.65}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230574	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

Note que, apesar de todas estas funções terem sido construídas como problemas de ponto fixo para resolver um mesmo problema de determinação de raiz, a convergência é bem diferente.

Isso leva a uma questão muito importante: como escolher um problema de ponto fixo que gere um sequência que convirja de modo rápido para a solução?

O teorema a seguir (e seu corolário) mostram caminhos a serem seguidos (ou evitados) para gerar uma função adequada.

Teorema 2: *Seja* $g \in \mathcal{C}[a, b]$ *tal que* $g(x) \in [a, b]$, *para todo* $x \in [a, b]$. *Suponha que* $g'(x)$ *exista em* (a, b) *e que exista uma constante* $0 < c < 1$ *com* $|g'(x)| \leq c$, *para todo* $x \in (a, b)$.

Então, para qualquer número $p_0 \in [a, b]$, *a sequência definida por* $p_k = g(p_{k-1})$, $k \geq 1$, *converge para o único ponto fixo* p *em* $[a, b]$.

Convergência

Corolário 1: *Se g satisfizer as hipóteses do* Teorema 2*, então os limitantes para o erro envolvido na utilização de p_k para a aproximação de p são dados por*

$$\boxed{|p_k - p| \leq c^k \max\{p_0 - a, b - p_0\}}$$

e

$$\boxed{|p_k - p| \leq \frac{c^k}{1-c}|p_0 - p|,}$$

para todo $k \geq 1$.

Convergência

As duas desigualdades do Corolário 1 relacionam a taxa com a qual a sequência $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge, com o limitante c para a primeira derivada.

A taxa de convergência depende do valor c^k. Quanto menor for o valor de c, mais rápida será a convergência. Quanto mais próximo de 1, mais lenta.

Método do Ponto Fixo - exemplo

Vamos analisar a taxa de convergência de cada uma das funções g_i do exemplo anterior de acordo com o Teorema 2 e o Corolário 1.

- Para $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$, temos $g_1(1) = 6$ e $g_1(2) = -12$, o que mostra que g_1 não leva $[1, 2]$ em $[1, 2]$.

  Além disso, $g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x$, ou seja, $|g_1'(x)| > 1$ para todo $x \in [1, 2]$.

  Apesar do Teorema 2 não afirmar que o Método do Ponto Fixo vá falhar usando g_1, não há motivos para que a convergência seja esperada.

Método do Ponto Fixo - exemplo

- Para $g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$, podemos notar que $g_2(x)$ não leva $[1, 2]$ em $[1, 2]$ e a sequência $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ não é definida quando $p_0 = 1.5$.

  Além disso, como $p \approx 1.365$, temos que $g_2'(p) \approx 3.4$. Ou seja, não existe intervalo I contendo p tal que $|g_2'(x)| \leq 1$, para $x \in I$.

  Portanto, não há razão para esperar que o Método do Ponto Fixo convirja usando g_2.

Método do Ponto Fixo - exemplo

- Para $g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$, temos que $g_3'(x) = -\frac{3x^2}{4\sqrt{10-x^3}} \leq 0$, para todo $x \in [1, 2]$. Ou seja, g_3 é estritamente decrescente neste intervalo. No entanto, $|g_3'(2)| \approx 2.12$ e a condição $|g_3'(2)| \leq c < 1$ falha em $[1, 2]$.

  Fazendo uma análise mais detalhada, notamos que o intervalo $[1, 1.5]$ poderia ser utilizado no lugar do intervalo $[1, 2]$. Neste novo intervalo, ainda é verdade que g_3 é estritamente decrescente e, além disso,

$$1 < 1.28 \approx g_3(1.5) \leq g_3(x) \leq g_3(1) \approx 1.5,$$

  para todo $x \in [1, 1.5]$. Isso mostra que g_3 leva $[1, 1.5]$ em $[1, 1.5]$.

  Como $|g_3'(x)| \leq |g_3'(1.5)| \approx 0.66$ neste intervalo, o Teorema 2 confirma a convergência que sabíamos existir.

Método do Ponto Fixo - exemplo

- Para $g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$, temos que

$$|g_4'(x)| = \left| \frac{-5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}} \right| \leq \frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}} < 0.15,$$

para todo $x \in [1, 2]$.

Como o limitante para o módulo de $g_4'(x)$ é muito menor do que o limitante encontrado para o módulo de $g_3'(x)$, a convergência é muito mais rápida quando usamos g_4 no Método do Ponto Fixo.

Método do Ponto Fixo - exemplo

- A sequência definida por $g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$ converge mais rápido do que todas as outras opções.

  Mais adiante veremos porque isso acontece.