Método de Quadrados Mínimos: Caso contínuo

Marina Andretta

ICMC-USP

30 de maio de 2012

Baseado no livro Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Aproximação de funções

Estamos interessados, agora, em resolver o seguinte problema: dada uma função $f \in \mathcal{C}[a, b]$, queremos determinar um polinômio $P_n(x)$, de grau máximo n, de forma que $P_n(x)$ esteja o mais próximo possível de $f(x)$.

Este problema pode ser tratado utilizando o Método de Quadrados Mínimos.

Método de Quadrados Mínimos

Agora que temos de calcular a distância entre duas funções (f e P_n), utilizaremos o erro

$$\int_a^b (f(x) - P_n(x))^2 dx.$$

Assim, o caso contínuo do Método de Quadrados Mínimos para este problema consiste encontrar os coeficientes do polinômio de que minimizem este erro.

Método de Quadrados Mínimos

Como o polinômio é dado por

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

queremos minimizar

$$E \equiv E(a_0, a_1, ..., a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)^2 dx.$$

Método de Quadrados Mínimos

Para isto, devemos igualar as derivadas parciais a 0, ou seja,

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0,$$

para $j = 0, 1, ..., n$.

Como

$$E = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)^2 dx =$$

$$\int_a^b (f(x))^2 dx - 2 \int_a^b \sum_{k=0}^{n} a_k x^k f(x) dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)^2 dx =$$

$$\int_a^b (f(x))^2 dx - 2 \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k f(x) dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)^2 dx,$$

Método de Quadrados Mínimos

temos que

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\int_a^b x^j f(x)dx + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx.$$

Portanto, as $n+1$ equações normais são dadas por

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x)dx,$$

para $j = 0, 1, ..., n$, e formam um sistema linear.

Método de Quadrados Mínimos - exemplo

Queremos aproximar a função $f(x) = \sin(\pi x)$, no intervalo $[0, 1]$, por um polinômio, de grau máximo 2, $P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

As equações normais para este problema são:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_0 \int_0^1 1 dx & + & a_1 \int_0^1 x dx & + & a_2 \int_0^1 x^2 dx & = & \int_0^1 \sin(\pi x) dx, \\ a_0 \int_0^1 x dx & + & a_1 \int_0^1 x^2 dx & + & a_2 \int_0^1 x^3 dx & = & \int_0^1 x \sin(\pi x) dx, \\ a_0 \int_0^2 x^2 dx & + & a_1 \int_0^1 x^3 dx & + & a_2 \int_0^1 x^4 dx & = & \int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx. \end{array} \right.$$

Método de Quadrados Mínimos - exemplo

Calculando os coeficientes do sistema, temos

$$\int_0^1 1dx = x\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1,$$

$$\int_0^1 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 x^4dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

Método de Quadrados Mínimos - exemplo

Os termos do lado direito das equações são

$$\int_0^1 \sin(\pi x)dx = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\bigg|_0^1 = \frac{1}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi},$$

$$\int_0^1 x\sin(\pi x)dx = \frac{\sin(\pi x) - \pi x\cos(\pi x)}{\pi^2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{\pi} - 0 = \frac{1}{\pi},$$

$$\int_0^1 x^2\sin(\pi x)dx = \frac{(2-\pi^2x^2)\cos(\pi x) + 2\pi x\sin(\pi x)}{\pi^3}\bigg|_0^1 =$$

$$\frac{\pi^2-2}{\pi^3} - \frac{2}{\pi^3} = \frac{\pi^2-4}{\pi^3}.$$

Método de Quadrados Mínimos - exemplo

Assim, temos de resolver o sistema de equações normais

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_0 & + & \frac{1}{2}a_1 & + & \frac{1}{3}a_2 & = & \frac{2}{\pi}, \\ \frac{1}{2}a_0 & + & \frac{1}{3}a_1 & + & \frac{1}{4}a_2 & = & \frac{1}{\pi}, \\ \frac{1}{3}a_0 & + & \frac{1}{4}a_1 & + & \frac{1}{5}a_2 & = & \frac{\pi^2-4}{\pi^3}. \end{array}\right.$$

Método de Quadrados Mínimos - exemplo

A solução deste sistema é dada por

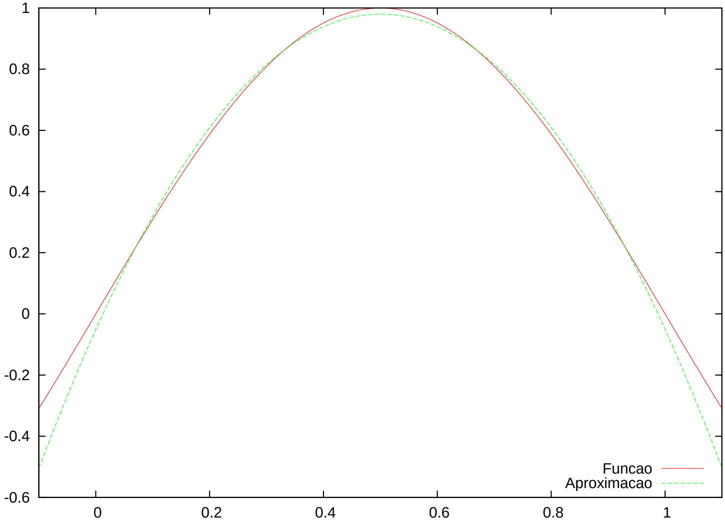
$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0.050465,$$

$$a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4.12251.$$

Portanto, o polinômio de grau máximo 2 que melhor aproxima a função $f(x) = \sin(\pi x)$, no sentido de quadrados mínimos, é

$$P_2(x) = -4.12251x^2 + 4.12251x - 0.050465.$$

Método de Quadrados Mínimos - exemplo



Método de Quadrados Mínimos

Este exemplo ilustra a dificuldade em obter uma aproximação polinomial por quadrados mínimos.

Os coeficientes do sistema linear são dados por

$$\int_a^b x^{j+k} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}.$$

A matriz com estes elementos é a conhecida matriz de Hilbert. Ela é muito usada para exemplificar problemas numéricos que podem acontecer durante a resolução de sistemas lineares.

Método de Quadrados Mínimos

Além disso, quando um polinômio de grau até n é calculado e desejamos calcular o polinômio de grau $n+1$, nenhuma informação pode ser aproveitada.

Existem maneiras de contornar estes problemas, mas eles não serão discutidos no curso.

Outra observação importante é que podemos usar o Método de Quadrados Mínimos para aproximar funções usando outros tipos de funções, não apenas polinômios.