Determinação de raízes de funções: Método de Newton

Marina Andretta

ICMC-USP

5 de fevereiro de 2013

Baseado no livro Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Estamos interessados em resolver o problema de encontrar uma raiz (ou uma solução) de uma equação da forma

$$\boxed{f(x) = 0,}$$

para uma dada função $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$.

Um dos métodos mais eficientes para a resolução deste problema é o Método de Newton (ou Método de Newton-Raphson).

Há diversas formas de deduzi-lo, mas o faremos usando os polinômios de Taylor.

Método de Newton

Suponha que $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Seja $p_0 \in [a, b]$ uma aproximação da solução p de $f(x) = 0$ tal que $f'(p_0) \neq 0$ e $|p - p_0|$ seja "pequeno".

Considere o polinômio de Taylor de primeiro grau para $f(x)$, expandido em torno de p_0 e calculado em $x = p$,

$$\boxed{f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \tfrac{(p-p_0)^2}{2} f''(\xi(p)),}$$

com $\xi(p)$ entre p e p_0.

Método de Newton

Como $f(p) = 0$, temos que

$$\boxed{0 = f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \tfrac{(p-p_0)^2}{2} f''(\xi(p)).}$$

Supondo que o termo $|p - p_0|$ seja “pequeno”, o termo envolvendo $(p - p_0)^2$ é muito menor. Deste modo, temos

$$\boxed{0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0).}$$

Método de Newton

Isolando p, temos

$$\boxed{p \approx p_1 \equiv p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}.}$$

Assim, o Método de Newton consiste em, dada uma aproximação inicial p_0 da solução, gerar a sequência $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ dada por

$$\boxed{p_k = p_{k-1} - \frac{f(p_{k-1})}{f'(p_{k-1})},}$$

para $k \geq 1$.

Algoritmo

Método de Newton: dados uma aproximação inicial p_0, uma tolerância $TOL > 0$ e o número máximo de iterações N_0, devolve a solução aproximada p ou uma mensagem de erro.

Passo 1: Faça $k \leftarrow 1$.

Passo 2: Enquanto $k \leq N_0$, execute os passos 3 a 6:

Passo 3: Faça $p \leftarrow p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$.

Passo 4: Se $|p - p_0| < TOL$ ou $\frac{|p-p_0|}{|p|} < TOL$ ou $|f(p)| < TOL$,

então devolva p como solução e pare.

Passo 5: Faça $k \leftarrow k + 1$.

Passo 6: Faça $p_0 \leftarrow p$.

Passo 7: Escreva "o método falhou após N_0 iterações" e pare.

Geometricamente, o que o Método de Newton faz é o seguinte:

1. Dado um ponto p_{k-1}, calcula a reta tangente a f em p_{k-1}.
2. Encontra o ponto $\bar{p}_{k-1}$ no qual a reta tangente passa pelo zero.
3. Toma $p_k = \bar{p}_{k-1}$.

Método de Newton - exemplo 1

Considere a equação

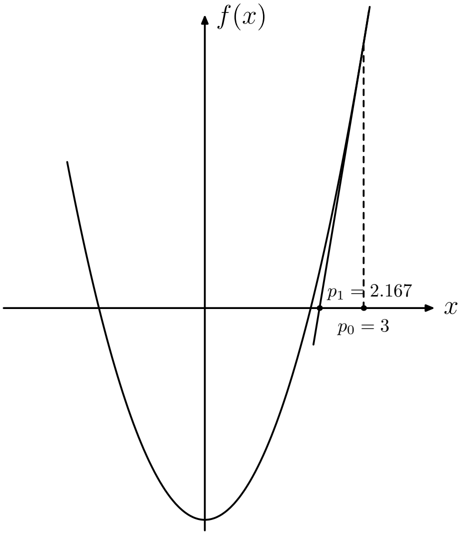
$$\boxed{x^2 - 4 = 0,}$$

que tem solução $p = 2$.

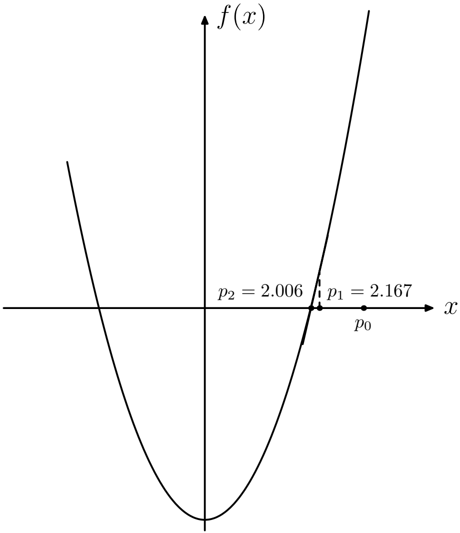
Note que

$$\boxed{f(x) = x^2 - 4 \quad \text{e} \quad f'(x) = 2x,}$$

Método de Newton - exemplo 1



Método de Newton - exemplo 1



Usando ponto inicial $p_0 = 3$, a resolução desta equação, usando o Método de Newton, é dada por:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)}$$

$$p_1 = 3 - \frac{3^2-4}{2\times 3} \approx 2.16666667$$

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)} = 2.16666667 - \frac{f(2.16666667)}{f'(2.16666667)}$$

$$p_2 = 2.16666667 - \frac{2.16666667^2-4}{2\times 2.16666667} \approx 2.00641026$$

Método de Newton - exemplo 1

Usando ponto inicial $p_0 = 3$, a resolução desta equação, usando o Método de Newton, é dada por:

k	p_k	$f(p_k)$
0	3.00000000	5.00000000
1	2.16666667	0.69444444
2	2.00641026	0.02568212
3	2.00001024	4.09602097E−05
4	2.00000000	1.04858344E−10

Método de Newton - exemplo 2

Considere agora a equação

$$\boxed{xe^{-x^2} = 0,}$$

que tem solução $p = 0$.

Note que

$$\boxed{f(x) = xe^{-x^2} \quad \text{e} \quad f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2),}$$

Método de Newton - exemplo 2

Usando ponto inicial $p_0 = 1$, a resolução desta equação, usando o Método de Newton, é dada por:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}$$

$$p_1 = 1 - \frac{e^{-1}}{e^{-1}(1-2)} = 2$$

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)}$$

$$p_2 = 2 - \frac{2e^{-2^2}}{e^{-2^2}(1-22^2)} \approx 2.285714$$

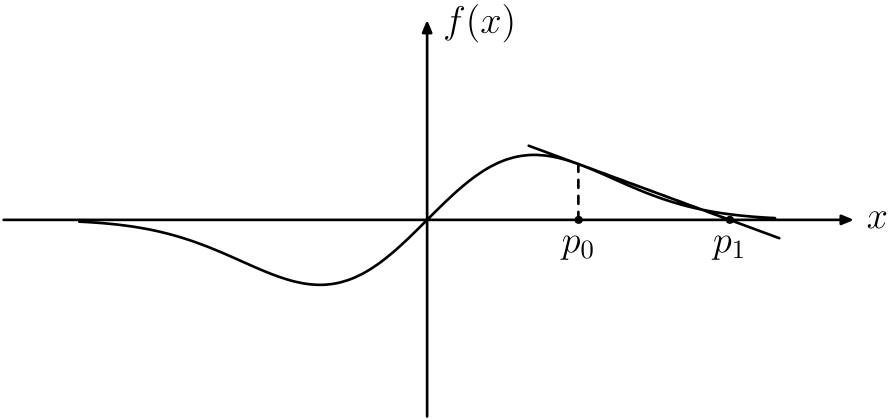
Método de Newton - exemplo 2

De fato, a sequência gerada pelo Método de Newton, neste caso, é dada por

$$p_k = p_{k-1} - \frac{p_{k-1}e^{-p_{k-1}^2}}{e^{-p_{k-1}^2}(1 - 2p_{k-1}^2)} = p_{k-1} - \frac{p_{k-1}}{(1 - 2p_{k-1}^2)}.$$

Note que, a partir de $p_k = 1$, esta é uma sequência crescente. Ou seja, ela não converge para a solução $p = 0$!

Método de Newton - exemplo 2



Convergência

Seja $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Se $p \in [a, b]$ é tal que $f(p) = 0$ e $f'(p) \neq 0$, então existe um $\delta > 0$ tal que o Método de Newton gera uma sequência $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ convergente para p para qualquer aproximação inicial $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

Mais ainda, se o Método de Newton converge, sua convergência é quadrática.

Note que o Método de Newton é um caso particular do Método de Ponto Fixo com $p_k = g(p_{k-1})$, para o qual

$$\boxed{g(p_{k-1}) = p_{k-1} - \frac{f(p_{k-1})}{f'(p_{k-1})},}$$

para $k \geq 1$.

Esta equação mostra que o Método de Newton não pode ser aplicado quando $f'(p_{k-1})$, para algum k. De fato, veremos que o método é mais eficiente quando f' está longe de zero.

Método de Newton X Método de Ponto Fixo - exemplo

Suponha que devamos obter uma aproximação de uma solução de $f(x) = \cos(x) - x = 0$.

Uma solução deste problema também é uma solução do problema de ponto fixo $x = \cos(x)$. Existe apenas uma solução p para este problema no intervalo $[0, \pi/2]$.

Podemos encontrá-la usando o Método de Ponto Fixo, com $p_0 = \pi/4$.

Outra possibilidade é aplicar o Método de Newton para encontrar uma raiz de f. Neste caso, p_k é dado por

$$\boxed{p_k = p_{k-1} - \frac{\cos(p_{k-1}) - p_{k-1}}{-\sin(p_{k-1}) - 1},}$$

para $k \geq 1$.

A tabela a seguir fornece os valores p_k obtidos usando o Método de Ponto Fixo e o Método de Newton. Note que a convergência do Método de Newton é muito mais rápida.

Método de Newton X Método de Ponto Fixo - exemplo

k	p_k (Ponto Fixo)	p_k (Newton)
0	0.7853981635	0.7853981635
1	0.7071067810	0.7395361337
2	0.7602445972	0.7390851781
3	0.7246674808	0.7390851332
4	0.7487198858	0.7390851332
5	0.7325608446	
6	0.7434642113	
7	0.7361282565	