Interpolação polinomial: Diferenças divididas de Newton

Marina Andretta

ICMC-USP

9 de maio de 2013

Baseado no livro Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Diferenças divididas

Já vimos como construir aproximações sucessivas para um valor de $f(x)$ através de polinômios interpoladores de Lagrange com graus cada vez maiores, usando o Método de Neville.

Veremos agora como construir os polinômios interpoladores de maneira sucessiva.

Diferenças divididas

Suponha que $P_n(x)$ seja o n-ésimo polinômio interpolador de Lagrange que coincide com uma função f nos pontos $x_0, x_1, ..., x_n$.

Embora este polinômio seja único, há diversas formas diferentes de representá-lo.

As diferenças divididas de f em relação a $x_0, x_1, ..., x_n$ são usadas para representar $P_n(x)$ na forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}),$$

para constantes adequadas $a_0, a_1, ..., a_n$.

Diferenças divididas

Para determinar o valor de a_0, note que, quando calculamos $P_n(x_0)$, temos

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0).$$

Da mesma forma, calculando $P_n(x_1)$, temos

$$f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1).$$

Daí, podemos calcular o valor de a_1:

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Diferenças divididas

Apresentamos, agora, a noção de diferença dividida.

A diferença dividida de ordem zero da função f em relação a x_i, denotada $f[x_i]$, é o valor de f em x_i:

$$f[x_i] = f(x_i).$$

Diferenças divididas

A primeira diferença dividida da função f em relação a x_i e x_{i+1}, denotada $f[x_i, x_{i+1}]$, é definida como

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}. \tag{1}$$

A segunda diferença dividida da função f em relação a x_i, x_{i+1} e x_{i+2}, denotada $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$, é definida como

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}.$$

Analogamente, depois das $k-1$-ésimas diferenças divididas

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}] \text{ e } f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}]$$

serem calculadas, a k-ésima diferença dividida com relação a $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}$ é dada por

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

O processo continua até que a única n-ésima diferença dividida

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

seja calculada.

Usando esta notação, podemos escrever polinômio interpolador como

$$P_n(x) = f[x_0] + a_1(x - x_0) +$$

$$a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}),$$

com $a_k = f[x_0, x_1, ..., x_k]$, para $0 \leq k \leq n$.

Portanto, o polinômio interpolador pode ser escrito como

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_k](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1}).$$

Note que o valor de $f[x_0, x_1, ..., x_k]$ não depende da ordem dos números $x_0, x_1, ..., x_k$.

Algoritmo

Diferenças divididas de Newton: dados os números distintos $x_0, x_1, ..., x_n$, os valores $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ como a primeira coluna $F_{0,0}, F_{1,0}, ..., F_{n,0}$ de F, calcula a tabela F tal que $F_{i,i} = f[x_0, x_1, ..., x_i]$ e $P(x)$, polinômio interpolador de f nos pontos $x_0, x_1, ..., x_n$, dado por $P(x) = \sum_{i=0}^{n} F_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$.

Passo 1: Para $i = 1, ..., n$, execute o passo 2:

Passo 2: Para $j = 1, ..., i$, faça

$$F_{i,j} \leftarrow \frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.$$

Passo 3: Devolva F e pare.

A tabela a seguir fornece os valores de uma função em vários pontos:

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

Diferenças divididas de Newton - exemplo

A tabela a seguir fornece os valores obtidos aplicando o Método de diferenças divididas de Newton:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, ..., x_i]$	$f[x_{i-3}, ..., x_i]$	$f[x_{i-4}, ..., x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		-0.1087339		
			-0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
			-0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

Diferenças divididas de Newton - exemplo

Os coeficientes do polinômio interpolador são obtidos usando os elementos em vermelho da tabela:

$$P_4(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x-1) - 0.1087339(x-1)(x-1.3)+$$

$$0.0658784(x-1)(x-1.3)(x-1.6)+$$

$$0.0018251(x-1)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9).$$

Diferenças divididas de Newton - exemplo