Exemplos de modelos para problemas usando Programação Linear

12 de agosto de 2019

Baseado nos livros Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis; Pesquisa Operacional, de H. A. Taha; e em notas de aula de pesquisadores do Laboratório de Otimização do ICMC-USP.

Exemplo 1 - Planejamento Urbano

A cidade de Erstville enfrenta uma séria carência orçamentária. Em busca de uma solução de longo prazo, a câmara de vereadores da cidade aprovou uma melhoria da base de cobrança de impostos que prevê a demolição de uma área habitacional do centro da cidade e sua substituição por um conjunto habitacional moderno.

O projeto envolve duas fases:

1. demolição das casas que estão aquém do padrão para liberar terreno para o novo projeto;
2. construção do novo conjunto urbano.

Exemplo 1 - Planejamento Urbano

A seguir temos um resumo da situação.

- Um total de 300 casas aquém do padrão podem ser demolidas. Cada casa ocupa um lote de 0,25 acres. O custo da demolição de uma casa condenada é de $2000.
- Os tamanhos dos lotes para domicílios (unidades) simples, duplos, triplos e quádruplos são de 0,18; 0,28; 0,4 e 0,5 acres, respectivamente. As ruas, espaços abertos e instalações públicas ocupam 15%.
- No novo conjunto habitacional, as unidades triplas e quádruplas representam no mínimo 25% do total. Unidades simples devem representar no mínimo 20% de todas as unidades, e unidades duplas, no mínimo 10%.

Exemplo 1 - Planejamento Urbano

- O imposto cobrado por unidade para unidades simples, duplas, triplas e quádruplas é de \$1.000, \$1.900, \$2.700 e \$3.400, respectivamente.

- O custo da construção por unidade domiciliar simples, duplas, triplas e quádruplas é de \$50.000, \$70.000, \$130.000 e \$160.000, respectivamente. O financiamento acordado com um banco local é de, no máximo, \$15.000.000.

Quantas unidades de cada tipo devem ser construídas para maximizar a arrecadação de impostos?

Exemplo 1 - Modelagem

Vamos começar definindo nossas variáveis de decisão. Queremos decidir quantas casas antigas serão demolidas e quantas novas (de cada um dos tipos - simples, dupla, tripla ou quádrupla) serão construídas.

Então, vamos definir

- x_a a quantidade de casas antigas que serão demolidas;
- x_s a quantidade de casas simples que serão construídas;
- x_d a quantidade de casas duplas que serão construídas;
- x_t a quantidade de casas triplas que serão construídas;
- x_q a quantidade de casas quádruplas que serão construídas.

Exemplo 1 - Modelagem

Como o objetivo é maximizar a quantidade de impostos recolhida, queremos

$$\text{maximizar} \quad 1.000x_s + 1.900x_d + 2.700x_3 + 3.400x_q.$$

Vamos agora definir as restrições que devem ser satisfeitas.

Exemplo 1 - Modelagem

Para garantir que haja espaço suficiente para a construção das novas casas, note que a área liberada pelas demolições é $0,25x_a$.

Como 15% desta área precisa ser destinada a ruas, espaços abertos e instalações públicas, resta uma área de $0,85(0,25x_a) = 0,2125x_a$ para construção das novas casas.

Para estas construções, será necessário usar a seguinte área:

$$0,18x_s + 0,28x_d + 0,4x_t + 0,5x_q.$$

Portanto, precisamos impor que

$$0,18x_s + 0,28x_d + 0,4x_t + 0,5x_q \leq 0,2125x_a.$$

Exemplo 1 - Modelagem

Para garantir que haja dinheiro suficiente para as construções, precisamos garantir que o custo das demolições das casas antigas e construções das casas novas não ultrapasse o valor obtido para financiamento.

Ou seja,

$$50000x_s + 70000x_d + 130000x_t + 160000x_q + 2000x_a \leq 15000000 \Rightarrow$$

$$50x_s + 70x_d + 130x_t + 160x_q + 2x_a \leq 15000.$$

Exemplo 1 - Modelagem

Sabemos que podem ser demolidas no máximo 300 casas. Ou seja,

$$x_a \leq 300.$$

Além disso, as quantidades de casas demolidas ou construídas devem ser todas maiores ou iguais a 0. Ou seja,

$$x_s, x_d, x_t, x_q, x_a \geq 0.$$

Exemplo 1 - Modelagem

Por fim, precisamos garantir a proporção entre casas simples, duplas, triplas e quádruplas.

O total de casas novas é dado por

$$x_s + x_d + x_t + x_q.$$

Deste total, queremos garantir que as unidades triplas e quádruplas representam no mínimo 25% do total. Ou seja,

$$x_t + x_q \geq 0,25(x_s + x_d + x_t + x_q) \Rightarrow$$

$$-0,25x_s - 0,25x_d + 0,75x_t + 0,75x_q \geq 0.$$

Exemplo 1 - Modelagem

Como as unidades simples devem representar no mínimo 20% de todas as unidades, temos

$$x_s \geq 0,20(x_s + x_d + x_t + x_q) \Rightarrow$$

$$0,8x_s - 0,2x_d - 0,2x_t - 0,2x_q \geq 0.$$

Como as unidades duplas devem ser, no mínimo, 10% de todas as unidades, temos

$$x_d \geq 0,10(x_s + x_d + x_t + x_q) \Rightarrow$$

$$-0,1x_s + 0,9x_d - 0,1x_t - 0,1x_q \geq 0.$$

Exemplo 1 - Modelagem

Portanto, nosso modelo para este problema é

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{maximizar} & 1.000x_s + 1.900x_d + 2.700x_3 + 3.400x_q & & \\
\text{sujeita a} & 0,18x_s + 0,28x_d + 0,4x_t + 0,5x_q & \leq & 0,2125x_a, \\
& 50x_s + 70x_d + 130x_t + 160x_q + 2x_a & \leq & 15000, \\
& x_a & \leq & 300, \\
& -0,25x_s - 0,25x_d + 0,75x_t + 0,75x_q & \geq & 0, \\
& 0,8x_s - 0,2x_d - 0,2x_t - 0,2x_q & \geq & 0, \\
& -0,1x_s + 0,9x_d - 0,1x_t - 0,1x_q & \geq & 0, \\
& x_s, x_d, x_t, x_q, x_a & \geq & 0.
\end{array}
$$

Exemplo 2.1 - Transporte de café

Uma companhia brasileira transforma grãos de café em café em pó em m plantas produtoras (fábricas).

O café é enviado semanalmente para n depósitos localizados em grandes cidades para varejo, distribuição e exportação.

Suponha que

- o custo unitário de envio da planta i para o depósito j seja dado por c_{ij};
- a capacidade de produção da planta i é denotada por a_i;
- a demanda do depósito j é denotada por b_j.

Exemplo 2.1 - Transporte de café

Quanto deve ser transportado de cada uma das plantas para cada um dos depósitos de forma a minimizar o custo total de transporte de mercadoria das plantas aos depósitos, satisfazendo as demandas dos depósitos?

Exemplo 2.1 - modelagem

Primeiramente, vamos definir as variáveis de decisão do nosso modelo.

Seja x_{ij} a quantidade de café que deve ser enviada da planta i ao depósito j semanalmente (para $i = 1, .., m$ e $j = 1, ..., n$). Claramente, precisamos que $x_{ij} \geq 0$ para todo i e j.

Exemplo 2.1 - modelagem

Primeiramente, vamos definir as variáveis de decisão do nosso modelo.

Seja x_{ij} a quantidade de café que deve ser enviada da planta i ao depósito j semanalmente (para $i = 1, .., m$ e $j = 1, ..., n$). Claramente, precisamos que $x_{ij} \geq 0$ para todo i e j.

O custo total do transporte do café das m plantas para os n depósitos é dado por

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

Exemplo 2.1 - modelagem

Como cada planta i tem uma capacidade de produção a_i, precisamos garantir que a quantidade de café enviada da planta i não ultrapasse este valor.

Isto pode ser garantido impondo a restrição

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i$$

para cada $i = 1, ..., m$.

Exemplo 2.1 - modelagem

Como cada depósito j tem uma demanda b_j a ser atendida pelas plantas, precisamos garantir que a quantidade de café enviada para cada depósito seja exatamente este valor.

Isto pode ser garantido impondo a restrição

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

para cada $j = 1, ..., n$.

Exemplo 2.1 - modelagem

Então, uma modelagem para o problema é

$$
\begin{array}{rll}
\text{minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{sujeita a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, & i = 1, \ldots, m, \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1, \ldots, n, \\
& x_{ij} \geq 0, & i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Exemplo 2.2 - variação do problema

Suponha, agora, que a demanda semanal de cada depósito é dinâmica, isto é, a cada semana, a demanda de cada depósito pode ser alterada.

Suponha um horizonte finito de planejamento composto por T semanas e seja b_{jt} a demanda de café do depósito j na semana t.

O que precisa ser mudado no modelo construído para representar este novo problema?

Exemplo 2.2 - modelagem

Neste caso, precisamos definir quanto de café será enviado de uma planta i, a um depósito j, na semana t.

Então, nossas variáveis de decisão passam a ser x_{ijt}, que é a quantidade de café enviada da planta i ao depósito j na semana t, para $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ e $t = 1, ..., T$. Precisamos impor que $x_{ijt} \geq 0$ para todo i, j e t.

Exemplo 2.2 - modelagem

Neste caso, precisamos definir quanto de café será enviado de uma planta i, a um depósito j, na semana t.

Então, nossas variáveis de decisão passam a ser x_{ijt}, que é a quantidade de café enviada da planta i ao depósito j na semana t, para $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ e $t = 1, ..., T$. Precisamos impor que $x_{ijt} \geq 0$ para todo i, j e t.

Neste caso, o custo de transporte passa a ser

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} c_{ij} x_{ijt}.$$

Exemplo 2.2 - modelagem

Para garantir que a capacidade de produção a_i de cada planta i é respeitada a cada semana, precisamos garantir que a quantidade de café enviada da planta i não ultrapasse este valor.

Isto pode ser garantido impondo a restrição

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijt} \leq a_i$$

para cada $i = 1, ..., m$ e $t = 1, ..., T$.

Exemplo 2.2 - modelagem

Como cada depósito j tem uma demanda b_{jt} a ser atendida pelas plantas na semana t, precisamos garantir que a quantidade de café enviada para cada depósito a cada semana seja exatamente este valor.

Isto pode ser garantido impondo a restrição

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijt} = b_{jt}$$

para cada $j = 1, ..., n$ e $t = 1, ..., T$.

Exemplo 2.2 - modelagem

Então, uma modelagem para o problema é

$$
\begin{array}{rlr}
\text{minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{ij}x_{ijt} & \\
\text{sujeita a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ijt} \leq a_i, & i = 1,\ldots,m,\ t = 1,\ldots,T, \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ijt} = b_{jt}, & j = 1,\ldots,n,\ t = 1,\ldots,T, \\
& x_{ijt} \geq 0 & i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n,\ t = 1,\ldots,T.
\end{array}
$$

Exemplo 2.3 - mais uma variação do problema

Suponha, agora, que cada depósito possui uma determinada capacidade de estocagem (denotada por s_j), de modo que a demanda em cada período pode ser satisfeita tanto com o seu estoque próprio como com a mercadoria recebida das plantas produtoras no mesmo período.

Suponha que as quantidades em estoque em cada depósito no início do horizonte de planejamento são conhecidas, sendo I_{j0} a quantidade inicial estocada no depósito j.

O que devemos mudar no modelo agora?

Exemplo 2.3 - modelagem

Vamos manter as variáveis x_{ijt}, como no modelo anterior, mas vamos acrescentar um novo conjunto de variáveis.

Seja I_{jt} a quantidade de café em estoque no depósito j no final do período t. Claramente, essas variáveis devem assumir valores maiores ou iguais a 0.

Exemplo 2.3 - modelagem

Vamos manter as variáveis x_{ijt}, como no modelo anterior, mas vamos acrescentar um novo conjunto de variáveis.

Seja I_{jt} a quantidade de café em estoque no depósito j no final do período t. Claramente, essas variáveis devem assumir valores maiores ou iguais a 0.

Note que o custo para este modelo é o mesmo do modelo anterior.

As restrições relacionadas às capacidades das plantas também são as mesmas.

Exemplo 2.3 - modelagem

Para garantir que a quantidade de café em estoque em cada depósito j na semana t não ultrapasse a capacidade s_j, impomos a restrição

$$I_{jt} \leq s_j$$

para $j = 1, ..., n$ e $t = 1, ..., T$.

Exemplo 2.3 - modelagem

Finalmente, para garantir que as demandas dos depósitos sejam atendidas pelos estoques e pelas plantas a cada semana, definimos as restrições

$$I_{j,t-1} + \sum_{i=1}^{m} x_{ijt} = b_{jt} + I_{jt},$$

para $j = 1, ..., n$ e $t = 1, ..., T$.

Ou seja, para cada semana e cada depósito, somando a quantidade de café em estoque no depósito com o que é enviado pelas plantas (lado esquerdo da inequação), temos de atender à demanda do depósito e, possivelmente, acrescentar mais café ao estoque (lado direito da inequação).

Exemplo 2.3 - modelagem

Então, uma modelagem para o problema é

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{ij}x_{ijt} & \\
\text{sujeita a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ijt} \leq a_i, & i = 1, \ldots, m,\ t = 1, \ldots, T, \\
& \displaystyle I_{j,t-1} + \sum_{i=1}^{m} x_{ijt} = b_{jt} + I_{jt}, & j = 1, \ldots, n,\ t = 1, \ldots, T, \\
& I_{jt} \leq s_j, & j = 1, \ldots, n,\ t = 1, \ldots, T, \\
& x_{ijt} \geq 0, & i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n, \\
& & t = 1, \ldots, T, \\
& I_{jt} \geq 0, & j = 1, \ldots, n,\ t = 1, \ldots, T.
\end{array}
$$

Exemplo 3 - planejamento de capacidade elétrica

Um país deseja planejar sua capacidade elétrica para os próximos T anos.

O país supõe que sejam necessários d_t megawatts de demanda por eletricidade para cada ano $t = 1, ..., T$.

A capacidade existente, que está em plantas de queima de óleo, não será removida e estará disponível para uso em um ano t é dada por e_t.

Exemplo 3 - planejamento de capacidade elétrica

Há duas alternativas para expandir a capacidade elétrica: usinas de carvão e usinas nucleares.

Há um custo de c_t por megawatt de capacidade gerada por queima de carvão que passa a estar disponível no início do ano t.

O custo correspondente para capacidade gerada por usina nuclear é n_t.

Exemplo 3 - planejamento de capacidade elétrica

Por diversas razões políticas e de segurança, foi decidido que não mais de 20% da capacidade total, em qualquer período t, deve ser gerada pela usina nuclear.

Usinas de carvão duram 20 anos, enquanto usinas nucleares duram 15 anos.

Deseja-se obter um planejamento de expansão da capacidade ao menor custo.

Exemplo 3 - modelagem

Primeiramente, vamos definir nossas variáveis de decisão.

Sejam x_t a capacidade colocada em operação pela usina de carvão no início do ano t e y_t a capacidade colocada em operação pela usina nuclear no início do ano t.

Sejam w_t a capacidade total disponibilizada pela usina de carvão no ano t e z_t a capacidade total disponibilizada pela usina nuclear no ano t.

Claramente, todas essas variáveis devem assumir valores maiores ou iguais a 0.

Exemplo 3 - modelagem

O custo de um plano de expansão de capacidade é dado por

$$\sum_{t=1}^{T}(c_t x_t + n_t y_t).$$

Exemplo 3 - modelagem

Como as usinas de carvão duram 20 anos, para calcular quanto esta usina gerou no ano t, só podemos somar o que ela gerou no início do ano t com os anos anteriores, até o ano $19 - t$ (quando este for maior ou igual a 1).

Então, temos

$$w_t = \sum_{s=\max\{1,t-19\}}^{t} x_s \Rightarrow$$

$$w_t - \sum_{s=\max\{1,t-19\}}^{t} x_s = 0,$$

para $t = 1, ..., T$.

Analogamente, para usinas nucleares, temos

$$z_t = \sum_{s=\max\{1,t-14\}}^{t} y_s \Rightarrow$$

$$z_t - \sum_{s=\max\{1,t-14\}}^{t} y_s = 0,$$

para $t = 1, ..., T$.

Exemplo 3 - modelagem

Como a capacidade disponível em cada ano deve atender à demanda prevista, temos que

$$w_t + z_t + e_t \geq d_t \Rightarrow$$

$$w_t + z_t \geq d_t - e_t,$$

para $t = 1, ..., T$.

Exemplo 3 - modelagem

Finalmente, como não mais de 20% da capacidade total pode ser de usina nuclear, temos

$$\frac{z_t}{w_t + z_t + e_t} \leq 0,2 \Rightarrow$$

$$z_t \leq 0,2(w_t + z_t + e_t) \Rightarrow .$$

$$0,8z_t - 0,2w_t \leq 0,2e_t,$$

para $t = 1, ..., T$.

Exemplo 3 - modelagem

Portanto, um modelo para este problema é dado por

$$
\begin{array}{rlr}
\text{minimizar} & \displaystyle\sum_{t=1}^{T}(c_t x_t + n_t y_t) & \\
\text{sujeita a} & \displaystyle w_t - \sum_{s=\max\{1,t-19\}}^{t} x_s = 0, & i = 1, \ldots, T, \\
& \displaystyle z_t - \sum_{s=\max\{1,t-14\}}^{t} y_s = 0, & i = 1, \ldots, T, \\
& w_t + z_t \geq d_t - e_t, & i = 1, \ldots, T, \\
& 0,8z_t - 0,2w_t \leq 0,2e_t, & i = 1, \ldots, T, \\
& x_t, y_t, w_t, z_t \geq 0, & i = 1, \ldots, T.
\end{array}
$$

Exemplo 3 - modelagem

Note que este modelo não é completamente realista, já que ignora algumas economias de escala que favorecem usinas maiores. No entanto, ele pode fornecer uma boa estimativa para o custo real.