Implementação do tableau completo

Marina Andretta

ICMC-USP

9 de outubro de 2019

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Implementação do tableau completo

Vamos ver agora a implementação do Método Simplex chamada de tableau completo.

Aqui, em vez de manter e atualizar a matriz B^{-1}, mantemos e atualizamos a matriz

$$B^{-1} \left(\begin{array}{c|c} b & A \end{array} \right)$$

com colunas $B^{-1}b$ e $B^{-1}A_1$, ..., $B^{-1}A_n$.

Esta matriz é chamada de simplex tableau.

Implementação do tableau completo

Note que a coluna $B^{-1}b$, chamada de coluna 0, contém o valor das variáveis básicas. A coluna $B^{-1}A_i$ é chamada de i-ésima coluna do tableau.

A coluna $u = B^{-1}A_j$, que corresponde à variável que entra na base, é chamada de coluna pivô.

Se a ℓ-ésima variável básica sai da base, a ℓ-ésima linha do tableau é chamada de linha pivô.

O elemento da coluna e linha pivô é chamado de elemento pivô. Note que o elemento pivô é u_ℓ e é sempre positivo (a menos que $u \leq 0$, caso em que o critério de otimalidade é satisfeito e o algoritmo pára.)

Implementação do tableau completo

Uma interpretação para os elementos do tableau é a seguinte. As restrições de igualdade são dadas inicialmente na forma $b = Ax$.

Dada a base atual B, estas restrições de igualdade podem ser expressas, de maneira equivalente, como

$$B^{-1}b = B^{-1}Ax,$$

que é exatamente a informação armazenada no tableau.

Em outras palavras, as linhas do tableau fornecem os coeficientes das restrições de igualdade $B^{-1}b = B^{-1}Ax$.

Implementação do tableau completo

Ao final de cada iteração, precisamos atualizar o tableau $B^{-1}(b \mid A)$ e calcular $\bar{B}^{-1}(b \mid A)$.

Isso pode ser feito multiplicando o tableau pela esquerda pela matriz Q tal que $QB^{-1} = \bar{B}^{-1}$. É possível mostrar que essa matriz sempre existe.

Isso é o mesmo que realizar operações elementares em linhas de forma a transformar B^{-1} em $\bar{B}^{-1}$.

Para isto, somamos a cada linha um múltiplo da linha pivô de forma a transformar todas as entradas na coluna pivô em 0, com exceção do elemento pivô, que é transformado em 1.

Implementação do tableau completo

Para determinar a coluna $A_{B(\ell)}$ que sai da base e o tamanho de passo θ^*, fazemos o seguinte: $x_{B(i)}/u_i$ é a razão entre a i-ésima entrada da coluna 0 do tableau e a i-ésima componente na coluna pivô.

Consideramos somente índices i para os quais u_i é positivo.

A menor destas razões é θ^* e determina ℓ.

Implementação do tableau completo

É comum acrescentar ao tableau uma linha no topo, chamada de linha 0.

O elemento no canto superior esquerdo é o valor $-c_B^T x_B$, que é o negativo do custo atual.

O restante da linha 0 é o vetor de custos reduzidos, ou seja, $\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A$.

Implementação do tableau completo

Então, a estrutura do tableau é dada por

$-c_B^T B^{-1} b$	$c^T - c_B^T B^{-1} A$
$B^{-1} b$	$B^{-1} A$

ou, em mais detalhes,

$$
\begin{array}{|c|ccc|}
\hline
-c_B^T x_B & \bar{c}_1 & \ldots & \bar{c}_n \\
\hline
x_{B(1)} & | & & | \\
\vdots & B^{-1}A_1 & \ldots & B^{-1}A_n \\
x_{B(m)} & | & & | \\
\hline
\end{array}
$$

Implementação do tableau completo

A regra para atualizar a linha 0 é idêntica à usada para atualizar as demais linhas do tableau: somar um múltiplo da linha pivô à linha 0 de forma a transformar em 0 o custo reduzido da variável que entra na base.

Vejamos porque esta atualização funciona.

Implementação do tableau completo

No início de uma iteração, a linha 0 tem a forma

$$(0 \mid c^T) - g^T(b \mid A),$$

com $g^T = c_B^T B^{-1}$.

Portanto, a linha 0 é igual a $(0 \mid c^T)$ mais uma combinação linear das linhas de $(b \mid A)$.

Seja j a coluna pivô e ℓ a linha pivô. Note que a linha pivô tem a forma $h^T(b \mid A)$, com h^T a ℓ-ésima linha de B^{-1}.

Implementação do tableau completo

Portanto, depois que um múltiplo da linha pivô é somado à linha 0, esta linha é novamente igual a $(0 \mid c^T)$ mais uma outra combinação linear das linhas de $(b \mid A)$, e tem a forma

$$(0 \mid c^T) - p^T(b \mid A),$$

para um vetor p.

Lembre-se que a regra de atualização proposta é tal que o elemento da coluna pivô na linha 0 se torna 0, ou seja,

$$c_{\bar{B}(\ell)} - p^T A_{\bar{B}(\ell)} = c_j - p^T A_j = 0.$$

Implementação do tableau completo

Considere agora a coluna $\bar{B}(i)$, para $i \neq \ell$ (ou seja, uma coluna correspondente a uma variável básica que permanece na base).

O 0-ésimo elemento desta coluna é 0 antes da mudança de base, já que este é o custo reduzido de uma variável básica.

Como $B^{-1}A_{B(i)}$ é a i-ésima coluna da identidade e $i \neq \ell$, o elemento na linha pivô para esta coluna também é 0.

Portanto, somar um múltiplo da linha pivô à linha 0 não afeta esta coluna da linha 0.

Concluímos, então, que o vetor p satisfaz $c_{\bar{B}(i)} - p^T A_{\bar{B}(i)} = 0$ para toda coluna $A_{\bar{B}(i)}$ na nova base.

Isso implica que $c_{\bar{B}} - p^T \bar{B} = 0$ e $p^T = c_{\bar{B}}^T \bar{B}^{-1}$.

Portanto, usando a regra de atualização proposta, a linha 0 do tableau atualizado é

$$(0 \mid c^T) - c_{\bar{B}}^T \bar{B}^{-1}(b \mid A).$$

Uma iteração do tableau completo

Descrevemos aqui uma iteração da implementação do tableau completo.

P1. Em uma iteração típica, começamos com o tableau associado à uma base B e a solução básica viável correspondente x.

P2. Examine os custos reduzidos na linha 0 do tableau.

Se todos os custos reduzidos forem não-negativos, a solução básica viável correspondente é ótima e o algoritmo pára.

Caso contrário, escolha um j para o qual $\bar{c}_j < 0$.

Uma iteração do tableau completo

P3. Considere o vetor $u = B^{-1}A_j$, que é a j-ésima coluna do tableau (coluna pivô).

Se nenhuma componente de u for positiva, temos $\theta^* = \infty$, custo ótimo é $-\infty$ e o algoritmo pára.

P4. Para cada componente u_i positiva, calcule as razões $x_{B(i)}/u_i$.

Seja ℓ o índice de uma linha que corresponde à menor razão. A coluna $A_{B(\ell)}$ sai da base e a coluna A_j entra na base.

P5. Some a cada linha do tableau um múltiplo da ℓ-ésima linha (linha pivô) de forma a transformar u_ℓ (elemento pivô) em 1 e todos os demais elementos da coluna pivô em 0.

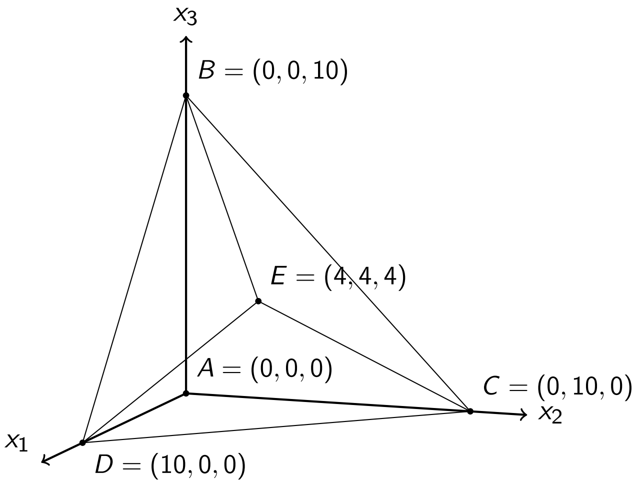
Exemplo 1

Considere o problema

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{minimizar} & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & & \\
\text{sujeita a} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20, \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20, \\
& 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 20, \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0,
\end{array}
$$

Exemplo 1

A região viável tem 5 vértices, A, B, C, D e E são mostrados na figura abaixo:



Exemplo 1

Acrescentando as variáveis de folga x_4, x_5 e x_6, temos o seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\text{minimizar} & -10x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & & & & & & & & \\
\text{sujeita a} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & = & 20, \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & = & 20, \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 20, \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0.
\end{array}$$

Exemplo 1

O vetor $x = (0, 0, 0, 20, 20, 20)$ é uma solução básica viável (ponto A da figura) e pode ser usado como ponto inicial para nosso algoritmo.

Vamos definir, então, $B(1) = 4$, $B(2) = 5$ e $B(3) = 6$. A matriz base correspondente é a matriz identidade.

Para calcular a linha 0 do tableau inicial, temos $c_B = 0$ e, portanto, $c_B^T x_B = 0$ e $\bar{c} = c$.

Portanto, o tableau inicial é

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	-10	-12	-12	0	0	0
$x_4 =$	20	1	2	2	1	0	0
$x_5 =$	20	2	1	2	0	1	0
$x_6 =$	20	2	2	1	0	0	1

Colocamos rótulos nas colunas para indicar que coluna está associada a qual variável. Fazemos o mesmo com as linhas, para indicar quais variáveis são básicas e qual a ordem usada.

Exemplo 1

O custo reduzido da variável x_1 é negativo e por isso esta variável será escolhida para entrar na base ($j = 1$).

A coluna pivô (associada à variável x_1) é $u = (1, 2, 2)$.

Calculamos então as razões $x_{B(i)}/u_i$, para $i = 1, 2, 3$. Para o nosso caso, temos

$$\frac{x_{B(1)}}{u_1} = \frac{x_4}{u_1} = \frac{20}{1} = 20, \qquad \frac{x_{B(2)}}{u_2} = \frac{x_5}{u_2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\frac{x_{B(3)}}{u_3} = \frac{x_6}{u_3} = \frac{20}{2} = 10.$$

A menor razão (10) é dada pelos índices $i = 2$ e $i = 3$. Escolhemos $\ell = 2$.

Isso determina o elemento pivô (linha $\ell = 2$ e coluna $j = 1$), sublinhado no tableau abaixo.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	-10	-12	-12	0	0	0
$x_4 =$	20	1	2	2	1	0	0
$x_5 =$	20	$\underline{\mathbf{2}}$	1	2	0	1	0
$x_6 =$	20	2	2	1	0	0	1

Como $\ell = 2$, a segunda variável básica $(B(2) = 5)$ deixa a base. A nova base é dada por $\bar{B}(1) = 4$, $\bar{B}(2) = j = 1$ e $\bar{B}(3) = 6$.

Exemplo 1

Para atualizar o tableau, precisamos somar um múltiplo da linha pivô ($\ell = 2$) em todas as outras linhas, de forma a obter custo reduzido 0 para a variável $x_j = x_1$ e a coluna $j = 1$ se tornar a ℓ-ésima coluna da identidade.

Para isso,

- multiplicamos a linha pivô por 5 e a somamos à linha 0, fazendo com que o custo reduzido de x_1 seja 0;
- multiplicamos a linha pivô por $1/2$ e a somamos na primeira linha, fazendo com que o primeiro elemento da primeira coluna se torne 0;
- subtraímos da linha pivô da terceira linha, fazendo com que o terceiro elemento da primeira coluna se torne 0;
- dividimos os elementos da linha pivô por 2, para que o segundo elemento da primeira coluna se torne 1.

Exemplo 1

Assim, o tableau atualizado fica

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	100	0	-7	-2	0	5	0
$x_4 =$	10	0	1.5	1	1	-0.5	0
$x_1 =$	10	1	0.5	1	0	0.5	0
$x_6 =$	0	0	1	-1	0	-1	1

A solução básica viável correspondente é $x = (10, 0, 0, 10, 0, 0)$ (ponto D da figura), com custo -100. Note que, como x_6 é uma variável básica nula, x é degenerada.

Exemplo 1

Como mencionado anteriormente, o tableau indica que as restrições de igualdade podem ser escritas da maneira equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} 10 & = & & & 1.5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 0.5x_5 & & \\ 10 & = & x_1 & + & 0.5x_2 & + & x_3 & & & + & 0.5x_5 & & \\ 0 & = & & & x_2 & - & x_3 & & & - & x_5 & + & x_6 \end{array} \right.$$

Voltando ao tableau:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	100	0	-7	-2	0	5	0
$x_4 =$	10	0	1.5	1	1	-0.5	0
$x_1 =$	10	1	0.5	1	0	0.5	0
$x_6 =$	0	0	1	-1	0	-1	1

Temos que as variáveis x_2 e x_3 possuem custo reduzido negativo. Vamos escolher a variável x_3 ($j = 3$) para entrar na base.

Exemplo 1

A coluna pivô é a terceira: $u = (1, 1, -1)$. Como $u_3 < 0$, calculamos apenas $x_{B(1)}/u_1$ e $x_{B(2)}/u_2$.

Neste caso, temos

$$\frac{x_{B(1)}}{u_1} = \frac{x_4}{u_1} = \frac{10}{1} = 10, \qquad \frac{x_{B(2)}}{u_2} = \frac{x_1}{u_2} = \frac{10}{1} = 10.$$

Novamente temos um empate e escolhemos $\ell = 1$, fazendo com que a variável básica $x_{B(\ell)} = x_{B(1)} = x_4$ saia da base.

O elemento pivô (linha $\ell = 1$ e coluna $j = 3$) está sublinhado no tableau:

$$
\begin{array}{r|r|rrrrrr|}
\hline
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\hline
 & 100 & 0 & -7 & -2 & 0 & 5 & 0 \\
\hline
x_4 = & 10 & 0 & 1.5 & \underline{\mathbf{1}} & 1 & -0.5 & 0 \\
x_1 = & 10 & 1 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\
x_6 = & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Usamos agora a linha pivô (primeira linha) para atualizar o tableau.

Exemplo 1

Depois da atualização, temos

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	120	0	-4	0	2	4	0
$x_3 =$	10	0	1.5	1	1	-0.5	0
$x_1 =$	0	1	-1	0	-1	1	0
$x_6 =$	10	0	2.5	0	1	-1.5	1

A solução básica associada é $x = (0, 0, 10, 0, 0, 10)$ (ponto B da figura), com custo -120.

Agora, a única variável com custo reduzido negativo é x_2, então ela é escolhida para entrar na base ($j = 2$).

Exemplo 1

A segunda coluna é dada por $u = (1.5, -1, 2.5)$. Calculando as razões $x_{B(i)}/u_i$, para $i = 1, 3$ (já que $u_2 < 0$), temos que a menor é dada por $B(\ell) = B(3) = 6$.

Assim, a variável x_6 sai da base e o elemento pivô (linha $\ell = 3$ e coluna $j = 2$) é sublinhado no tableau:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	120	0	-4	0	2	4	0
$x_3 =$	10	0	1.5	1	1	-0.5	0
$x_1 =$	0	1	-1	0	-1	1	0
$x_6 =$	10	0	$\underline{\mathbf{2.5}}$	0	1	-1.5	1

Exemplo 1

Usando a terceira linha para atualizar o tableau, obtemos

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	136	0	0	0	3.6	1.6	1.6
$x_3 =$	4	0	0	1	0.4	0.4	-0.6
$x_1 =$	4	1	0	0	-0.6	0.4	0.4
$x_2 =$	4	0	1	0	0.4	-0.6	0.4

A solução básica viável associada é $x^* = (4, 4, 4, 0, 0, 0)$ (ponto E da figura), com custo -136.

Note que todos os custos reduzidos são não-negativos. Portanto, x^* é a solução ótima.

Exemplo 1

Neste exemplo, o método simplex fez três mudanças de base para chegar na solução e percorreu os pontos $A - D - B - E$ da figura.

Com diferentes regras de pivotamento, um caminho diferente poderia ser percorrido.

Uma pergunta é: o Método Simplex poderia percorrer o caminho $A - D - E$, que envolve somente duas arestas, em apenas 2 iterações?

A resposta é não! A primeira e a última bases diferem em 3 colunas, então são necessárias pelo menos 3 iterações do Método Simplex para passar de uma a outra.

Exemplo 2

O exemplo a seguir mostra que o Método Simplex pode, de fato, ciclar.

Considere o problema dado pelo tableau

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0
$x_5 =$	0	1/4	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 =$	0	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

Exemplo 2

Vamos usar a seguinte regra de pivotamento:

(a) Selecionamos a variável não-básica com custo reduzido mais negativo para entrar na base.

(b) De todas as variáveis básicas que podem sair da base, selecionamos a que tem menor índice.

Exemplo 2

O pivô está sublinhado e as atualizações do tableau são apresentadas a seguir:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0
$x_5 =$	0	$\underline{\mathbf{1/4}}$	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 =$	0	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	0	-4	-7/2	33	3	0	0
$x_1 =$	0	1	-32	-4	36	4	0	0
$x_6 =$	0	0	4	3/2	-15	-2	1	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

Exemplo 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	0	-4	-7/2	33	3	0	0
$x_1 =$	0	1	-32	-4	36	4	0	0
$x_6 =$	0	0	$\underline{\mathbf{4}}$	3/2	-15	-2	1	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	0	0	-2	18	1	1	0
$x_1 =$	0	1	0	8	-84	-12	8	0
$x_2 =$	0	0	1	3/8	-15/4	-1/2	1/4	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

Exemplo 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	0	0	-2	18	1	1	0
$x_1 =$	0	1	0	**8**	-84	-12	8	0
$x_2 =$	0	0	1	3/8	-15/4	-1/2	1/4	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	1/4	0	0	-3	-2	3	0
$x_3 =$	0	1/8	0	1	-21/2	-3/2	1	0
$x_2 =$	0	-3/64	1	0	3/16	1/16	-1/8	0
$x_7 =$	1	-1/8	0	0	21/2	3/2	-1	1

Exemplo 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	1/4	0	0	-3	-2	3	0
$x_3 =$	0	1/8	0	1	-21/2	-3/2	1	0
$x_2 =$	0	-3/64	1	0	**3/16**	1/16	-1/8	0
$x_7 =$	1	-1/8	0	0	21/2	3/2	-1	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	-1/2	16	0	0	-1	1	0
$x_3 =$	0	-5/2	56	1	0	2	-6	0
$x_4 =$	0	-1/4	16/3	0	1	1/3	-2/3	0
$x_7 =$	1	5/2	-56	0	0	-2	6	1

Exemplo 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	-1/2	16	0	0	-1	1	0
$x_3 =$	0	-5/2	56	1	0	$\underline{\mathbf{2}}$	-6	0
$x_4 =$	0	-1/4	16/3	0	1	1/3	-2/3	0
$x_7 =$	1	5/2	-56	0	0	-2	6	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	-7/4	44	1/2	0	0	-2	0
$x_5 =$	0	-5/4	28	1/2	0	1	-3	0
$x_4 =$	0	1/6	-4	-1/6	1	0	1/3	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

Exemplo 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	-7/4	44	1/2	0	0	-2	0
$x_5 =$	0	-5/4	28	1/2	0	1	-3	0
$x_4 =$	0	1/6	-4	-1/6	1	0	**1/3**	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0
$x_5 =$	0	1/4	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 =$	0	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

Exemplo 2

Fazendo as atualizações, chegamos exatamente ao mesmo tableau inicial.

Note que em todas as mudanças de base, tivemos $\theta^* = 0$.

Em particular, em todos tableaus intermediários tivemos a mesma solução básica viável $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ e, consequentemente, mesmo custo $(c^T x = -3)$.

Comparação entre Métodos Simplex revisado e tableau completo

Suponha que fossemos resolver o problema aumentado

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimizar} & c^T x + 0^T y & & \\ \text{sujeita a} & Ax + Iy & = & b, \\ & x, y & \geq & 0. \end{array}$$

Para isso, poderíamos usar uma versão do Método Simplex que nunca permita que uma componente de y se torne básica. Então, o Método Simplex faz as mudanças de base como se o vetor y não existisse.

Comparação entre Métodos Simplex revisado e tableau completo

Note também que o vetor de custos reduzidos para este problema aumentado é

$$(c^T \mid 0^T) - c_B^T B^{-1}(A \mid I) = (\bar{c}^T \mid -c_B^T B^{-1}).$$

Então, o simplex tableau para o problema aumentado é

$-c_B^T B^{-1} b$	$\bar{c}^T$	$-c_B^T B^{-1}$
$B^{-1} b$	$B^{-1} A$	B^{-1}

Comparação entre Métodos Simplex revisado e tableau completo

Em particular, seguindo o método do tableau completo, a inversa da matriz base B^{-1} é calculada em cada iteração.

Então, podemos pensar no Método Simplex revisado como sendo o mesmo que o tableau completo aplicado ao problema aumentado, com exceção de que a parte do tableau que armazena $B^{-1}A$ nunca é calculada explicitamente.

Em vez disso, apenas quando uma variável x_j é escolhida para entrar na base, a coluna pivô $B^{-1}A_j$ é computada.

Comparação entre Métodos Simplex revisado e tableau completo

Portanto, o Método Simplex revisado é apenas uma variante do tableau completo, mas com armazenamento mais eficiente.

Se o Método Simplex revisado também calcular as entradas da linha 0 que ficam acima de B^{-1} (usando operações elementares de linhas), os multiplicadores simplex $p^T = c_B^T B^{-1}$ são disponibilizados, eliminando a necessidade de resolver o sistema linear $p^T B = c_B^T$ a cada iteração.

Comparação entre Métodos Simplex revisado e tableau completo

Vejamos agora o número de operações que cada uma das implementações faz por iteração e suas necessidades de armazenamento computacional.

O tableau completo precisa de um número constante (e pequeno) de operações aritméticas para atualizar cada entrada do tableau.

Então, o número de operações computacionais por iteração é proporcional ao tamanho do tableau, que é $O(mn)$.

Comparação entre Métodos Simplex revisado e tableau completo

O Método Simplex revisado usa operações parecidas para atualizar B^{-1} e $c_B^T B^{-1}$ e, como somente $O(m^2)$ entradas são atualizadas, são necessárias $O(m^2)$ operações por iteração.

Além disso, o custo reduzido de cada variável x_j pode ser calculado usando o produto interno $p^T A_j$, que requer $O(m)$ operações.

No pior caso, é necessário calcular o custo reduzido de todas as variáveis, o que dá um custo total de $O(mn)$ operações por iteração.

Como $m \leq n$, o custo computacional no pior caso, por iteração, é $O(mn + m^2) = O(mn)$ para ambas as implementações.

Comparação entre Métodos Simplex revisado e tableau completo

No entanto, se considerarmos a regra de pivotamento que avalia um custo reduzido por vez, até que um custo reduzido negativo seja encontrado, uma iteração típica do Método Simplex revisado pode usar muito menos operações.

No melhor caso, se o primeiro custo reduzido é negativo e a primeira variável é escolhida para entrar na base, somente $O(m^2)$ são realizadas.

A conclusão é que o Método Simplex revisado não pode ser mais lento que o tableau completo. E pode ser muito mais rápido.

Comparação entre Métodos Simplex revisado e tableau completo

Outra vantagem importando do Método Simplex revisado em relação ao tableau completo é o gasto de memória.

O Método Simplex revisado precisa de $O(m^2)$ posições de memória, enquanto o tableau completo precisa de $O(mn)$. Quando n é muito maior do que m, esta diferença é muito grande.

Comparação entre Métodos Simplex revisado e tableau completo

Pode-se argumentar que o gasto de memória do Método Simplex revisado também é $O(mn)$, já que é necessário armazenar a matriz A. No entanto, em boa parte dos problemas de grande porte, a matriz A é esparsa e pode ser armazenada de maneira mais compacta.

Note que o fato de A ser esparsa não necessariamente ajuda no armazenamento necessário para o tableau completo, já que mesmo com A esparsa, $B^{-1}A$, em geral, não é.

Comparação entre Métodos Simplex revisado e tableau completo

	Tableau completo	Simplex revisado
Memória	$O(mn)$	$O(m^2)$
Tempo no pior caso	$O(mn)$	$O(mn)$
Tempo no melhor caso	$O(mn)$	$O(m^2)$

Regras para evitar ciclagem

Vamos agora apresentar duas regras para evitar ciclagem, que fazem com que o Método Simplex tenha garantia de término mesmo no caso de problemas degenerados.

Assim, como corolário, temos que se o custo ótimo é finito, existe uma base ótima, ou seja, uma base que satisfaz $B^{-1}b \geq 0$ e $\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0^T$.

Ordem lexicográfica

Vamos apresentar agora a regra lexicográfica de pivotamento, que foi criada ao analisar o comportamento do Método Simplex em um problema degenerado quando o vetor do lado direito b é perturbado.

Definição 1. *Um vetor $u \in \boldsymbol{R}^n$ é dito lexicograficamente maior (ou menor) do que outro vetor $v \in \boldsymbol{R}^n$ se $u \neq v$ e a primeira componente não-nula de $u - v$ é positiva (ou negativa, respectivamente). Simbolicamente, escrevemos*

$$u \overset{L}{>} v \quad ou \quad u \overset{L}{<} v.$$

Ordem lexicográfica

Por exemplo,

$$(0,1,2,3) \overset{L}{>} (0,1,0,3),$$

$$(1,4,9,0) \overset{L}{<} (2,9,9,4).$$

Regra lexicográfica de pivotamento

P1. Escolha uma coluna A_j arbitrária para entrar na base, desde que o custo reduzido $\bar{c}_j$ seja negativo.

Seja $u = B^{-1}A_j$ a j-ésima coluna do tableau.

P2. Para cada i tal que $u_i > 0$, divida a i-ésima linha do tableau (incluindo a entrada na coluna 0) por u_i e escolha a menor linha lexicograficamente.

Se a linha ℓ é uma linha lexicograficamente menor, então a ℓ-ésima variável básica $x_{B(\ell)}$ sai da base.

Exemplo

Considere o seguinte tableau (a linha 0 está omitida) e suponha que a coluna pivô seja a terceira ($j = 3$).

1	0	5	3	...
2	4	6	-1	...
3	0	7	9	...

Note que, para determinar a variável que sai da base, temos um empate, já que $x_{B(1)}/u_1 = 1/3$ e $x_{B(3)}/u_3 = 3/9 = 1/3$.

Exemplo

Dividimos, então, a primeira linha do tableau por $u_1 = 3$ e a terceira linha por $u_3 = 9$:

$$\begin{array}{|c|cccc|}
\hline
1/3 & 0 & 5/3 & 1 & \dots \\
* & * & * & * & \dots \\
1/3 & 0 & 7/9 & 1 & \dots \\
\hline
\end{array}$$

O empate entre a primeira e a terceira linhas é desfeito fazendo uma comparação lexicográfica entre estas duas linhas.

Como $7/9 < 5/3$, a terceira linha é lexicograficamente menor e ela é escolhida como pivô. Ou seja, a variável $x_{B(3)}$ é escolhida para sair da base.

Regra lexicográfica de pivotamento

Note que a regra lexicográfica de pivotamento sempre leva a uma escolha única para a variável que vai sair da base.

Se esta escolha não fosse única, haveria duas linhas do tableau que são iguais, a menos da multiplicação por um escalar. Mas isso significaria que $B^{-1}A$ tem posto menor do que m e, portanto, A tem posto menor do que m. Isso contradiz a hipótese de que as linhas de A são linearmente independentes.

Regra lexicográfica de pivotamento

Teorema 1. *Suponha que o algoritmo Simplex começa com todas as linhas no tableau, com exceção da linha 0, lexicograficamente positivas. Suponha que a regra lexicográfica de pivotamento seja usada. Então:*

(a) *Toda linha do tableau simplex, com exceção da linha 0, permanece lexicograficamente positiva durante a execução do algoritmo.*

(b) *A linha 0 aumenta lexicograficamente estritamente a cada iteração.*

(c) *O Método Simplex termina depois de um número finito de iterações.*

Regra lexicográfica de pivotamento

Note que, para aplicar a regra lexicográfica de pivotamento, precisamos que o tableau inicial seja lexicograficamente positivo.

Se temos um tableau inicial, podemos renomear as variáveis de forma que as variáveis básicas sejam as m primeiras. Isso é equivalente a reordenar o tableau de modo que as primeiras m colunas de $B^{-1}A$ formem uma matriz identidade.

Este novo tableau tem linhas lexicograficamente positivas, como desejado.

Regra lexicográfica de pivotamento

A regra lexicográfica de pivotamento pode ser usada diretamente quando o tableau completo é usado.

Quando o Método Simplex revisado é usado e a matriz B^{-1} é calculada explicitamente, esta regra também pode ser usada. No entanto, em implementações sofisticadas do Método Simplex revisado, a matriz B^{-1} não é calculada explicitamente e esta regra não é adequada.

Regra de Bland

A regra de pivotamento do menor índice, conhecida como regra de Bland, é a seguinte.

P1. Encontre o menor j para o qual o custo reduzido $\bar{c}_j$ é negativo e faça a coluna A_j entrar na base.

P2. De todas as variáveis x_i empatadas no teste para escolher a variável que sai da base, escolha a que tem o menor valor de i.

Regra de Bland

Esta regra é compatível com a implementação do Simplex revisado em que os custos reduzidos das variáveis não-básicas são calculados um a um, na ordem, até que um valor negativo seja encontrado.

Usando esta regra de pivotamento, sabe-se que não ocorre ciclagem e que o Método Simplex tem garantia de terminar em um número finito de iterações.

Solução básica viável inicial

Para aplicar o Método Simplex, precisamos de uma solução básica viável inicial.

Em alguns casos, ela é fácil de ser calculada. Por exemplo, suponha que desejamos resolver um problema com restrições escritas na forma $Ax \leq b$, $x \geq 0$, com $b \geq 0$.

Podemos acrescentar variáveis de folga s não-negativas e reescrever as restrições como $Ax + s = b$.

O vetor (x, s) definido por $x = 0$ e $s = b$ é uma solução básica viável e a matriz base correspondente é a identidade.

Solução básica viável inicial

No caso geral, no entanto, encontrar uma solução básica viável inicial não é simples. Para isso, é necessário encontrar uma solução para um problema de programação linear auxiliar.

Considere o problema

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimizar} & c^T x & & \\ \text{sujeita a} & Ax & = & b, \\ & x & \geq & 0. \end{array}$$

Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $b \geq 0$ (caso alguma componente de b seja negativa, basta multiplicar a restrição correspondente por -1).

Solução básica viável inicial

Acrescentamos um vetor de variáveis artificiais $y \in \boldsymbol{R}^m$ e usamos o Método Simplex para resolver o problema auxiliar

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{minimizar} & y_1 + y_2 + \ldots + y_m & & \\
\text{sujeita a} & Ax + y & = & b, \\
 & x & \geq & 0, \\
 & y & \geq & 0.
\end{array}
$$

Encontrar uma solução básica viável inicial para este problema auxiliar é fácil: basta considerar $x = 0$ e $y = b$. A base associada a esta solução é a matriz identidade.

Solução básica viável inicial

Note que, se x é uma solução viável do problema original, esta escolha de x e $y = 0$ tem custo nulo para o problema auxiliar.

Portanto, se o custo ótimo para o problema auxiliar é não-nulo, temos que o problema original é inviável.

Se, por outro lado, obtemos uma solução com custo nulo para o problema auxiliar, ela deve satisfazer $y = 0$. Neste caso, x é uma solução básica viável para o problema original.

Solução básica viável inicial

Assim, temos um método que ou detecta inviabilidade do problema, ou calcula uma solução básica viável inicial.

No entanto, para aplicar o Método Simplex ao problema original, precisamos também da base B associada à solução básica viável inicial e, dependendo da implementação, o tableau correspondente.

Isso é facilmente obtido caso o Método Simplex aplicado ao problema auxiliar termine com uma matriz base B que contém apenas colunas da matriz A.

Neste caso, basta eliminar as colunas correspondentes às variáveis artificiais e continuar aplicando o Método Simplex no problema original, usando B como a matriz inicial.

Eliminando variáveis artificiais da base

Caso o problema original seja viável, o Método Simplex seja aplicado para resolver o problema auxiliar, ele termine sua execução em uma solução viável x^* do problema original, mas alguma variável artificial esteja na base final, temos uma situação mais complicada para calcular uma base B inicial para resolver o problema original.

Neste caso, como o valor das variáveis artificiais é 0, temos uma solução básica viável degenerada para o problema auxiliar.

Eliminando variáveis artificiais da base

Seja k o número de colunas de A que estão na base final ($k < m$). Suponha, quem perda de generalidade, que estas sejam as colunas $A_{B(1)}, ..., A_{B(k)}$.

Note que $x_{B(1)}, ..., x_{B(k)}$ são as únicas variáveis que podem não valer 0.

Como $A_{B(1)}, ..., A_{B(k)}$ fazem parte da base, elas devem ser linearmente independentes.

Eliminando variáveis artificiais da base

Como estamos supondo que as linhas de A são linearmente independentes, as colunas de A geram $\boldsymbol{R}^m$ e, por isso, podemos escolher $m - k$ colunas adicionais $A_{B(k+1)}, ..., A_{B(m)}$ de A de forma que as colunas $A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}$ sejam linearmente independentes.

Ou seja, é possível encontrar uma base formada exclusivamente por colunas de A, como queremos.

Com esta base, todos os elementos não-básicos de x^* valem 0 e segue que x^* é uma solução básica viável associada a esta nova base também.

Ao fazer isso, as variáveis artificiais, bem como suas correspondentes colunas no tableau, podem ser eliminadas.

Eliminando variáveis artificiais da base

O procedimento que acabamos de descrever depende fortemente da suposição que as m linhas de A são todas linearmente independentes.

Se isso não for verdade, é impossível construir uma base para $\mathbb{R}^m$ usando colunas de A e existem restrições de igualdade redundantes que devem ser eliminadas.

Isso pode ser feito mecanicamente, usando o tableau completo, como descrevemos a seguir.

Eliminando variáveis artificiais da base

Suponha que a ℓ-ésima variável básica seja uma variável artificial, que vale 0.

Examinamos a ℓ-ésima linha do tableau e encontramos um j tal que a ℓ-ésima entrada de $B^{-1}A_j$ é não-nula.

Vamos ver que A_j é linearmente independente das colunas $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(k)}$.

Eliminando variáveis artificiais da base

Note que $B^{-1}A_{B(i)} = e_i$, para $i = 1, ..., k$. Como $k < \ell$, a componente ℓ desses vetores é nula.

Portanto, qualquer combinação linear desses vetores terá a componente ℓ nula.

Como a componente ℓ de $B^{-1}A_j$ é não-nula, este vetor não é uma combinação linear de $B^{-1}A_{B(1)}, ..., B^{-1}A_{B(k)}$.

Equivalentemente, A_j não é combinação linear de $A_{B(1)}, ..., A_{B(k)}$.

Eliminando variáveis artificiais da base

Fazemos, então, A_j entrar na base e a ℓ-ésima variável sair da base.

Isso é feito da maneira usual: realizando as operações elementares de linha que transformam $B^{-1}A_j$ da ℓ-ésima coluna da identidade.

A única diferença em relação ao Simplex usual é que o elemento pivô (ℓ-ésimo elemento de $B^{-1}A_j$) pode ser negativo.

Eliminando variáveis artificiais da base

Como a ℓ-ésima variável básica era nula, somar um múltiplo da ℓ-ésima linha às outras linhas não muda o valor das variáveis básicas.

Isso significa que depois da mudança da base, permanecemos na mesma solução básica viável do problema auxiliar, mas reduzimos o número de variáveis básicas artificiais em um.

Repetimos este processo tantas vezes quanto necessário, até que todas as variáveis artificiais tenham sido removidas da base.

Eliminando variáveis artificiais da base

Suponha agora que a ℓ-ésima linha de $B^{-1}A_j$ seja nula. Neste caso, o procedimento descrito não pode ser aplicado.

Note que a ℓ-ésima linha de $B^{-1}A_j$ é igual a $g^T A$, com g^T a ℓ-ésima linha de B^{-1}.

Portanto, $g^T A = 0^T$, para um vetor não-nulo g, e a matriz A tem linhas linearmente dependentes. Como estamos lidando com um problema viável, temos também que $g^T b = 0$.

Portanto, a restrição $g^T Ax = g^T b$ é redundante e pode ser eliminada.

Como esta restrição é a informação dada pela ℓ-ésima linha do tableau, podemos eliminar esta linha e continuar a execução do algoritmo.

Exemplo 1

Considere o problema de programação linear

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{minimizar} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & \\
\text{sujeita a} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 3, \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2, \\
 & & & 4x_2 & + & 9x_3 & & & = & 5, \\
 & & & & & 3x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
 & & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Exemplo 1

Para encontrar uma solução viável, construímos o problema auxiliar

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcl}
\text{minimizar} & & & & & & & & & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & \\
\text{sujeita a} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & + & y_1 & & & & & & & = & 3, \\
& -x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & & & + & y_2 & & & & & = & 2, \\
& & & 4x_2 & + & 9x_3 & & & & & & & + & y_3 & & & = & 5, \\
& & & & & 3x_3 & + & x_4 & & & & & & & + & y_4 & = & 1, \\
& & & & & & & & & \multicolumn{8}{r}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4} & \geq & 0.
\end{array}
$$

Uma solução básica viável para o problema auxiliar é $(y_1, y_2, y_3, y_4) = b = (3, 2, 5, 1)$. A matriz base correspondente é a matriz identidade. Além disso, temos $c_B = (1, 1, 1, 1)$.

Exemplo 1

Calculamos os custos reduzidos para cada variável original x_i, dados por $-c_B^T A_i$, e montamos o tableau original:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	-11	0	-8	-21	-1	0	0	0	0
$y_1 =$	3	1	2	3	0	1	0	0	0
$y_2 =$	2	-1	2	6	0	0	1	0	0
$y_3 =$	5	0	4	9	0	0	0	1	0
$y_4 =$	1	0	0	3	1	0	0	0	1

Exemplo 1

Como os custos reduzidos das variáveis x_2, x_3 e x_4 são negativos, podemos escolher uma destas variáveis para entrar na base. Vamos escolher a variável x_4.

Assim, a variável y_4 deve sair da base. O pivô está destacado no tableau:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	-11	0	-8	-21	-1	0	0	0	0
$y_1 =$	3	1	2	3	0	1	0	0	0
$y_2 =$	2	-1	2	6	0	0	1	0	0
$y_3 =$	5	0	4	9	0	0	0	1	0
$y_4 =$	1	0	0	3	$\underline{\mathbf{1}}$	0	0	0	1

Exemplo 1

Atualizando o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	-10	0	-8	-18	0	0	0	0	1
$y_1 =$	3	1	2	3	0	1	0	0	0
$y_2 =$	2	-1	2	6	0	0	1	0	0
$y_3 =$	5	0	4	9	0	0	0	1	0
$x_4 =$	1	0	0	3	1	0	0	0	1

Exemplo 1

Podemos escolher a variável x_2 ou x_3 para entrar na base. Escolhemos x_3.

Com esta escolha, tanto y_2 como x_4 podem sair da base. Escolhemos x_4. O elemento pivô está destacado:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	-10	0	-8	-18	0	0	0	0	1
$y_1 =$	3	1	2	3	0	1	0	0	0
$y_2 =$	2	-1	2	6	0	0	1	0	0
$y_3 =$	5	0	4	9	0	0	0	1	0
$x_4 =$	1	0	0	$\underline{\mathbf{3}}$	1	0	0	0	1

Exemplo 1

Atualizando o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	-4	0	-8	0	6	0	0	0	7
$y_1 =$	2	1	2	0	-1	1	0	0	-1
$y_2 =$	0	-1	2	0	-2	0	1	0	-2
$y_3 =$	2	0	4	0	-3	0	0	1	-3
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

Exemplo 1

Agora a única variável que pode entrar na base é x_2. Assim, y_2 deve sair da base. O elemento pivô está destacado:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	-4	0	-8	0	6	0	0	0	7
$y_1 =$	2	1	2	0	-1	1	0	0	-1
$y_2 =$	0	-1	**2**	0	-2	0	1	0	-2
$y_3 =$	2	0	4	0	-3	0	0	1	-3
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

Exemplo 1

Atualizando o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	-4	-4	0	0	-2	0	4	0	-1
$y_1 =$	2	2	0	0	1	1	-1	0	1
$x_2 =$	0	-1/2	1	0	-1	0	1/2	0	-1
$y_3 =$	2	2	0	0	1	0	-2	1	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

Agora, tanto a variável x_1 com o a variável x_4 podem entrar na base. Escolhemos x_1.

Neste caso, tanto y_1 como y_3 pode sair da base. Escolhemos y_1. O elemento pivô está destacado:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	-4	-4	0	0	-2	0	4	0	-1
$y_1 =$	2	**2**	0	0	1	1	-1	0	1
$x_2 =$	0	-1/2	1	0	-1	0	1/2	0	-1
$y_3 =$	2	2	0	0	1	0	-2	1	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

Exemplo 1

Atualizando o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
	0	0	0	0	0	2	2	0	1
$x_1 =$	1	1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	1/2
$x_2 =$	1/2	0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0	-3/4
$y_3 =$	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3

Neste ponto, todos os custos reduzidos são não-negativos, então encontramos a solução ótima para o problema auxiliar. Além disso, o custo ótimo é 0, o que significa que temos um ponto viável para o problema original.

Exemplo 1

No entanto, a variável artificial y_3 está na base. Para obter uma solução básica viável para o problema original, precisamos tirar y_3 da base.

Note que y_3 é a terceira variável básica e a terceira entrada das colunas $B^{-1}A_j$, $j = 1, ..., 4$, associadas às variáveis originais, é 0.

Isso indica que a matriz A original tem linhas linearmente dependentes.

Podemos, então, remover a terceira linha do tableau, porque ela corresponde a uma restrição redundante. Depois disso, podemos também remover todas as variáveis artificiais.

Exemplo 1

Isso deixa o seguinte tableau para o problema original:

		x_1	x_2	x_3	x_4
	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
$x_1 =$	1	1	0	0	1/2
$x_2 =$	1/2	0	1	0	-3/4
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3

Agora podemos calcular os custos reduzidos para as variáveis originais, completar o tableau e começar a execução do Método Simplex para resolver o problema original.

Exemplo 1

Note que, para este exemplo, a variável artificial y_4 foi desnecessária.

Em vez de começar com $y_4 = 1$, poderíamos começar com $x_4 = 1$, eliminando a necessidade do primeiro pivô.

De maneira geral, sempre que há uma variável que aparece em uma única restrição e com coeficiente positivo, podemos sempre deixar esta variável na base inicial e não precisamos associar uma variável artificial a esta restrição.

Podemos agora definir um algoritmo completo para resolver problemas de programação linear na forma padrão, chamado de Método Simplex de duas fases.

Fase I:

P1. Se necessário, multiplique restrições por -1, de modo que $b \geq 0$.

P2. Introduza variáveis artificiais $y_1, ..., y_m$, se necessário, e aplique o Método Simplex ao problema auxiliar com custo $\sum_{i=1}^{m} y_i$.

Método Simplex de duas fases

P3. Se o custo ótimo do problema auxiliar é positivo, o problema original é inviável e o algoritmo pára.

P4. Se o custo ótimo do problema auxiliar é zero, uma solução viável para o problema original foi encontrada.

Se nenhuma variável artificial está na base final, as variáveis artificiais e as colunas correspondentes são eliminadas e tem-se uma base viável para o problema original.

P5. Se a ℓ-ésima variável básica é uma variável artificial, examine o ℓ-ésimo elemento das colunas $B^{-1}A_j$, para $j = 1, ..., n$.

Se todos estes elementos são 0, a linha ℓ representa uma restrição redundante e pode ser eliminada.

Caso contrário, se o ℓ-ésimo elemento de uma coluna j é não-nulo, aplique uma mudança de base (com este elemento servindo como pivô): a ℓ-ésima variável básica sai e a variável x_j entra na base.

Repita este procedimento até que todas as variáveis artificiais tenham saído da base.

Fase II:

P1. Sejam a base final e o tableau obtidos na Fase I a base e o tableau iniciais para a Fase II.

P2. Calcule os custos reduzidos de todas as variáveis para a base inicial, usando os coeficientes de custo do problema original.

P3. Aplique o Método Simplex ao problema original.

Método Simplex de duas fases

O Método Simplex de duas fases apresentado é completo, no sentido que ele lida com todas as possíveis situações. Desde que a ciclagem seja evitada (devido à não-degenerescência ou a regras de pivotamento), as possibilidades são as seguintes.

- Se o problema é inviável, isso é detectado na Fase I.
- Se o problema é viável, mas linhas de A são linearmente dependentes, isso é detectado e corrigido no final da Fase I, eliminando restrições de igualdade redundantes.
- Se o custo ótimo é $-\infty$, isso é detectado na Fase II.
- Caso contrário, a Fase II termina com a solução ótima.

Método do M-grande (ou *big-M*)

Vejamos agora o Método do M-grande, que combina as duas fases em uma só.

A ideia é introduzir uma função de custo

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} y_i,$$

com M uma constante positiva grande e y_i variáveis artificiais como na Fase I do Simplex.

Método do M-grande (ou *big-M*)

Para M suficientemente grande, se o problema original é viável e o custo ótimo é finito, todas as variáveis artificiais vão para 0, o que nos leva à minimização da função objetivo original.

De fato, não é necessário fixar um valor numérico para M. Podemos deixar M como um parâmetro indeterminado e calcular os custos reduzidos em função de M.

Sempre que M é comparado com outro número (para decidir se um custo reduzido é negativo), M será tratado como maior.

Exemplo 2

Considere o mesmo problema de programação linear do Exemplo 1:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{minimizar} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & \\
\text{sujeita a} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 3, \\
& -x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2, \\
& & & 4x_2 & + & 9x_3 & & & = & 5, \\
& & & & & 3x_3 & + & x_4 & = & 1, \\
& & & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0.
\end{array}
$$

Exemplo 2

Usaremos o Método do M-grande com o problema auxiliar

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcl}
\text{minimizar} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & My_1 & + & My_2 & + & My_3 & & \\
\text{sujeita a} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & + & y_1 & & & & & = & 3, \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & & & + & y_2 & & & = & 2, \\
 & & & 4x_2 & + & 9x_3 & & & & & & & + & y_3 & = & 5, \\
 & & & & & 3x_3 & + & x_4 & & & & & & & = & 1, \\
 & & & & & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Como a variável auxiliar y_4 é desnecessária, ela não será usada.

Exemplo 2

Uma solução básica viável para o problema auxiliar é calculada fazendo $(y_1, y_2, y_3, x_4) = b = (3, 2, 5, 1)$.

A matriz base correspondente é a identidade.

Além disso, temos $c_B = (M, M, M, 0)$.

Exemplo 2

Calculamos os custos reduzidos para cada uma das variáveis originais x_i, dado por $c_i - c_B^T A_i$, e montamos o tableau inicial:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
	-10M	1	-8M+1	-18M+1	0	0	0	0
$y_1 =$	3	1	2	3	0	1	0	0
$y_2 =$	2	-1	2	6	0	0	1	0
$y_3 =$	5	0	4	9	0	0	0	1
$x_4 =$	1	0	0	3	1	0	0	0

Para M suficientemente grande, os custos reduzidos das variáveis x_2 e x_3 são negativos.

Escolhemos a variável x_3 para entrar da base. Assim, ao calcular qual variável deve sair da base, podemos escolher entre y_2 e x_4. Escolhemos x_4. No tableau, o pivô está destacado:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
	-10M	1	-8M+1	-18M+1	0	0	0	0
$y_1 =$	3	1	2	3	0	1	0	0
$y_2 =$	2	-1	2	6	0	0	1	0
$y_3 =$	5	0	4	9	0	0	0	1
$x_4 =$	1	0	0	**3**	1	0	0	0

Exemplo 2

Para anular o custo reduzido da variável x_3, precisamos multiplicar a linha pivô por $6M - 1/3$ e somá-la à linha 0.

O tableau atualizado é:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
	-4M - 1/3	1	-8M+1	0	6M-1/3	0	0	0
$y_1 =$	2	1	2	0	-1	1	0	0
$y_2 =$	0	-1	2	0	-2	0	1	0
$y_3 =$	2	0	4	0	-3	0	0	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0

Exemplo 2

Para M suficientemente grande, o custo reduzido de x_2 é negativo, então esta variável é escolhida para entrar na base.

Neste caso, a variável y_2 é a única que pode sair da base. O pivô está destacado no tableau. Note que este é um pivô degenerado, com $\theta^* = 0$.

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
	-4M - 1/3	1	-8M+1	0	6M-1/3	0	0	0
$y_1 =$	2	1	2	0	-1	1	0	0
$y_2 =$	0	-1	$\underline{\mathbf{2}}$	0	-2	0	1	0
$y_3 =$	2	0	4	0	-3	0	0	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0

Exemplo 2

Ao atualizar o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
	-4M - 1/3	-4M+3/2	0	0	-2M+2/3	0	4M-1/2	0
$y_1 =$	2	2	0	0	1	1	-1	0
$x_2 =$	0	-1/2	1	0	-1	0	1/2	0
$y_3 =$	2	2	0	0	1	0	-2	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0

Exemplo 2

Dentre as possíveis variáveis para entrar na base (x_1 e x_4), escolhemos x_1.

Para sair da base, temos duas possibilidades: y_1 e y_3. Escolhemos y_1. O pivô está destacado no tableau:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
	-4M - 1/3	-4M+3/2	0	0	-2M+2/3	0	4M-1/2	0
$y_1 =$	2	**<u>2</u>**	0	0	1	1	-1	0
$x_2 =$	0	-1/2	1	0	-1	0	1/2	0
$y_3 =$	2	2	0	0	1	0	-2	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0

Exemplo 2

Atualizando o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
	-11/6	0	0	0	-1/12	2M-3/4	2M+1/4	0
$x_1 =$	1	1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0
$x_2 =$	1/2	0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0
$y_3 =$	0	0	0	0	0	-1	-1	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0

Exemplo 2

Escolhemos agora a variável x_4 para entrar na base e variável x_3 para entrar.

No tableau, o pivô está destacado:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
	-11/6	0	0	0	-1/12	2M-3/4	2M+1/4	0
$x_1 =$	1	1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0
$x_2 =$	1/2	0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0
$y_3 =$	0	0	0	0	0	-1	-1	1
$x_3 =$	1/3	0	0	1	$\underline{\mathbf{1/3}}$	0	0	0

Exemplo 2

Atualizando o tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
	-7/4	0	0	1/4	0	2M-3/4	2M+1/4	0
$x_1 =$	1/2	1	0	-3/2	0	1/2	-1/2	0
$x_2 =$	5/4	0	1	9/4	0	1/4	1/4	0
$y_3 =$	0	0	0	0	0	-1	-1	1
$x_4 =$	1	0	0	3	1	0	0	0

Para M suficientemente grande, todos os custos reduzidos são não-negativos e temos a solução ótima para o problema auxiliar.

Além disso, todas as variáveis artificiais (y_1, y_2 e y_3) valem 0, o que significa que temos a solução ótima para o problema original.