Método de restrições ativas para minimização com restrições lineares

Marina Andretta

ICMC-USP

16 de novembro de 2010

O problema

O problema a ser considerado é

$$\boxed{\text{Minimizar } f(x) \text{ sujeita a } x \in \Omega,}$$

onde

- $\Omega = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid C_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, p\}$,
- $C_i(x) = (a^i)^T x - b_i, \; a^i = (a_1^i, ..., a_n^i)^T$ e
- $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ pertence a $\mathcal{C}^2$.

Método de restrições ativas

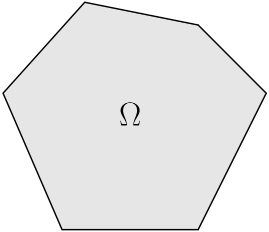
Métodos de restrições ativas se baseiam na seguinte idéia: se fosse possível conhecer o conjunto de restrições ativas na solução, a solução seria "facilmente" calculada (bastaria "apenas" resolver um problema irrestrito).

Assim, métodos de restrições ativas tentam, a cada iteração, descobrir qual o conjunto de restrições ativas na solução. Se detectam que o conjunto W de restrições que supunham ser ativas na solução está incorreto, utilizam algum critério para acrescentar ou remover restrições de W.

Dividimos a região viável Ω em faces abertas disjuntas. Para todo $I \subset \{1, 2, \dots, p\}$ definimos

$$\boxed{F_I = \{x \in \Omega \mid C_i(x) = 0 \text{ se e somente se } i \in I\}.}$$

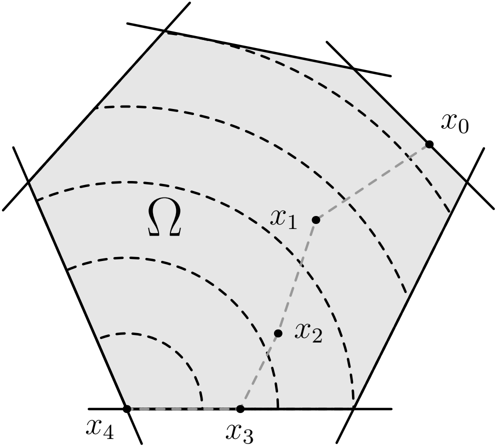
O conjunto Ω é a união das faces abertas.



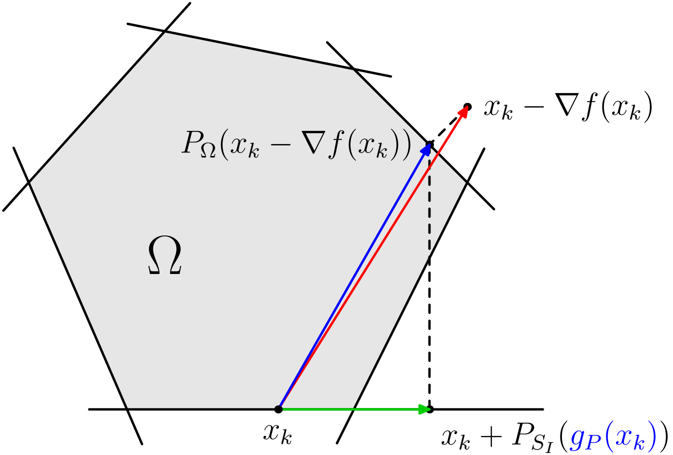
A idéia do método de restrições ativas apresentado aqui é a seguinte:

- A cada iteração k, tem-se um ponto x_k pertencente a uma face. No início de cada iteração, decide-se se a face atual deve ser abandonada ou não.
- Se o algoritmo decide abandonar a face atual, algum método é utilizado para calcular x_{k+1} em uma face diferente.
- Se o algoritmo decide permanecer na face atual, algum método é utilizado para calcular x_{k+1} no fecho da face atual.
- x_{k+1} sempre é calculado de maneira que seu valor de função seja menor do que o valor de função em x_k.

Método de restrições ativas

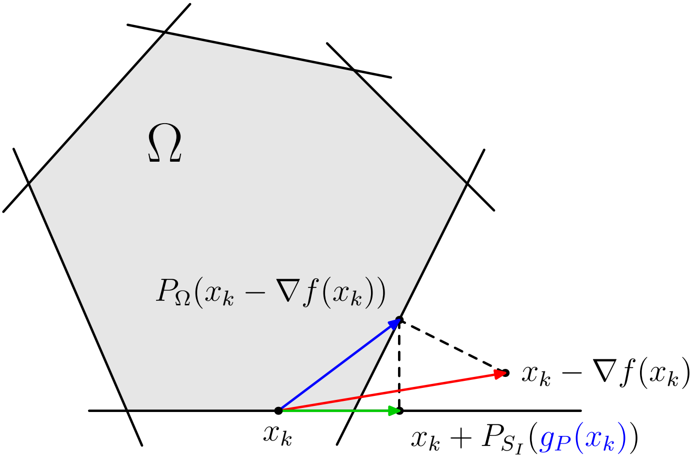


Decisão de permanecer ou não na face



Como $\|\nearrow\|$ é "muito" maior do que $\|\nearrow\|$, decidimos abandonar a face.

Decisão de permanecer ou não na face



Como $\|\nearrow\|$ NÃO é “muito” maior do que $\|\nearrow\|$, decidimos permanecer na face.

Cálculo da projeção P_Ω

Projetar um ponto $\bar{x} \in \boldsymbol{R}^n$ em Ω significa encontrar um ponto $\bar{x}^*$ que seja solução do seguinte problema:

$$\boxed{\text{Minimizar } \frac{1}{2}\|\bar{x} - x\|_2^2 \text{ sujeita a } x \in \Omega.}$$

Note que, quando há apenas restrições de caixa, a projeção é trivial. Na presença de restrições lineares, a projeção passou a ser um problema de minimização.

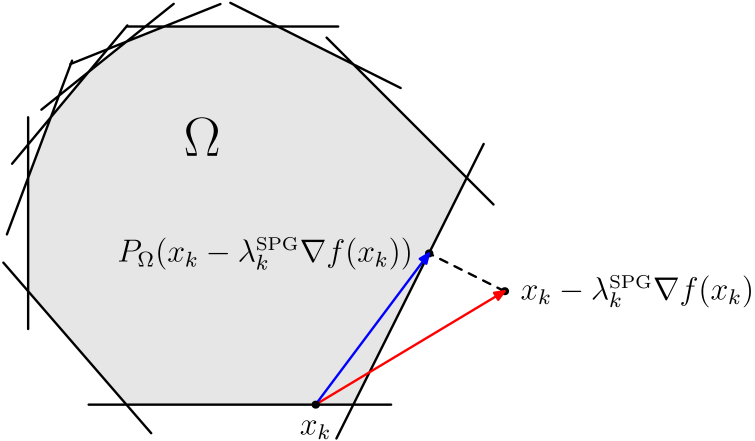
Vejamos agora algumas idéias para diminuir o número de projeções e o custo de cada uma delas.

Economia do número de projeções

- Como, na presença de restrições lineares, o custo computacional da projeção é alto, decidimos permanecer na mesma face até que seja encontrado o minimizador desta face ou até que uma "borda" seja atingida.

- Seguindo este critério, podemos acrescentar restrições ao conjunto de restrições ativas por várias iterações seguidas para, no fim, chegar a uma face que não contém a solução do problema. Para evitar que isso aconteça, se acrescentamos restrições ao conjunto de restrições ativas por 20 iterações consecutivas, abandonamos a face.

Sair da face: Método SPG parcial



Passo espectral

O passo espectral é dado por

$$\boxed{\lambda_k^{spg} = \frac{s_k^T s_k}{s_k^T y_k},}$$

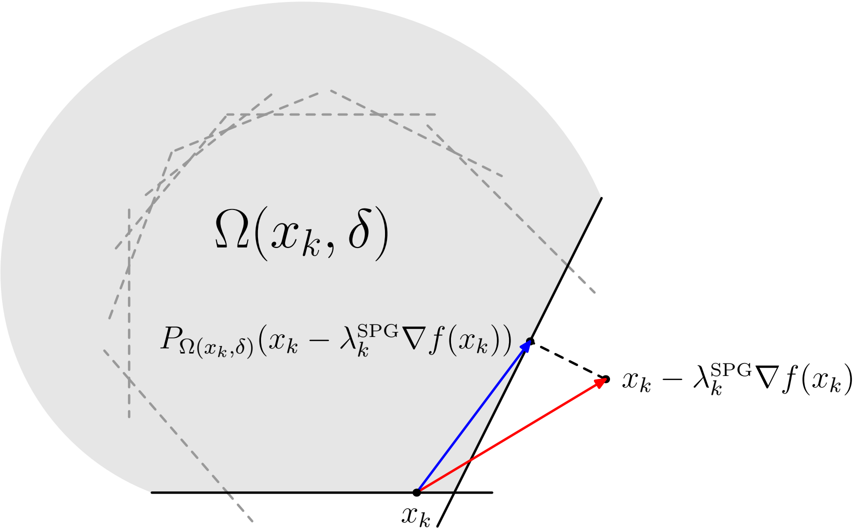
onde

$$s_k = x_k - x_{k-1}, \quad y_k = \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}).$$

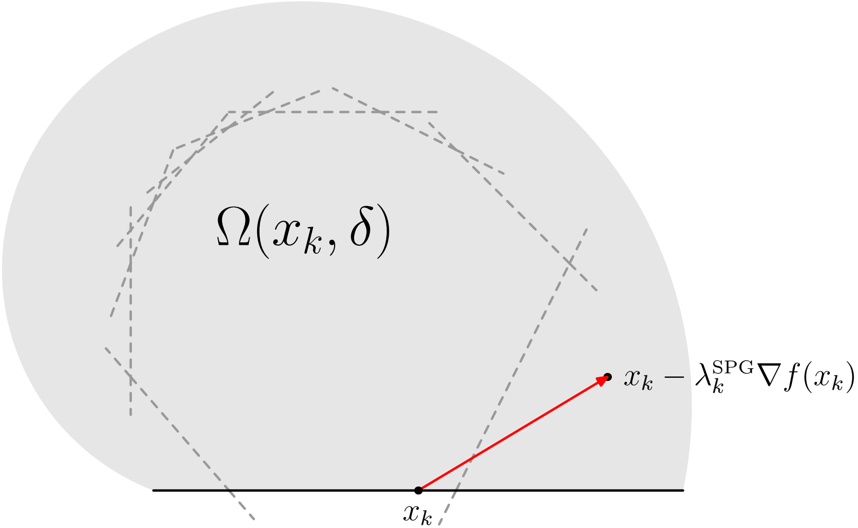
A interpretação para λ_k^{spg} é a seguinte:

$$\boxed{\lambda_k^{spg} = \begin{array}{ll} \text{argmin}_D & \frac{1}{2}\|Ds_k - y_k\|_2^2 \\ \text{sujeita a} & D = \frac{1}{\lambda} I. \end{array}}$$

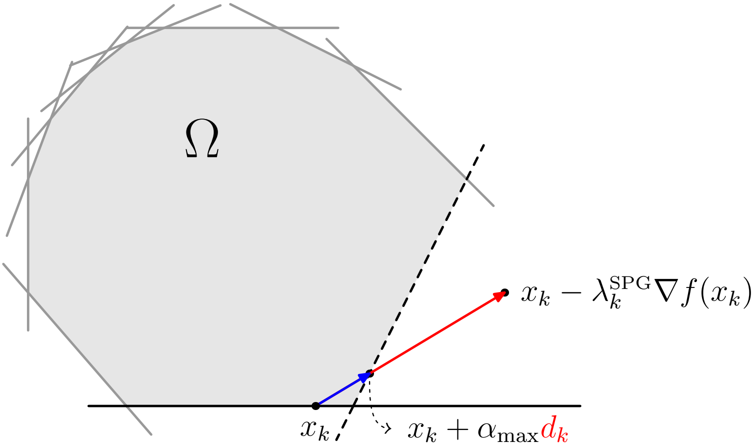
Método PSPG: δ ideal



Método PSPG: δ pequeno



Método PSPG: δ pequeno



Permanecer na face: minimização nas faces

Em cada face deseja-se encontrar solução para o problema

$$\boxed{\text{Minimizar } f(x) \text{ sujeita a } \bar{A}x = \bar{b},}$$

com

- $x \in \boldsymbol{R}^n$, $\bar{A} \in \boldsymbol{R}^{t \times n}$ e $\bar{b} \in \boldsymbol{R}^t$,
- $\bar{A}$ e $\bar{b}$ formados pelas t restrições ativas na face atual.

Ao resolver este problema, devemos tomar o cuidado de não violar as restrições restantes do problema original.

Este problema pode ser escrito como um problema irrestrito no espaço nulo do espaço gerado pelas linhas $\bar{A}$.

Minimização nas faces

O problema a ser resolvido em cada face pode ser escrito como

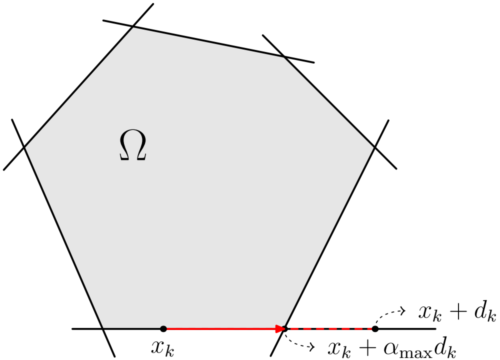
$$\boxed{\text{Minimizar} \quad \bar{f}(x^z) = f(Y(\bar{A}Y)^{-1}\bar{b} + Zx^z),}$$

onde

- $\bar{A}$ e $\bar{b}$ como definidos anteriormente,
- t número das restrições ativas,
- $x^z \in \boldsymbol{R}^{(n-t)}$,
- $Z \in \boldsymbol{R}^{n\times(n-t)}$ tal que $\bar{A}Z = 0$ e
- $Y \in \boldsymbol{R}^{n\times t}$ tal que $Z^T Y = 0$.

Minimização nas faces

O que fazer quando o ponto calculado pelo algoritmo irrestrito não é viável?



Critério de convergência

Se $z \in \Omega$ satisfaz as condições KKT do problema original, então z também satisfaz as condições KKT de

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeita a} & x \in \Omega(z, \delta), \end{array}} \qquad (\mathrm{P}_\delta)$$

para todo $\delta \geq 0$.

Reciprocamente, se z satisfaz as condições KKT de (P_δ) para algum $\delta \geq 0$, então z satisfaz as condições KKT do problema original.

Portanto, usaremos o critério de convergência $\|g_P(x_k, \delta^k)\| = 0$ (ao invés de $\|g_P(x_k)\| = 0$).