08/04/05 - Fórmula de Taylor. Dado um polinómio de grau n, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, verifica-se facilmente que

$$a_i = \frac{p^{(i)}(0)}{i!}$$

onde $p^{(i)}(0)$ designa a i-ésima derivada de p no ponto 0 (sendo a derivada de ordem 0 a própria função). Essa relação entre os coeficientes de p e as suas derivadas não se restringe ao ponto 0 uma vez que, dado $a \in \mathbb{R}$, podemos sempre escrever $p(x)$ na forma $\sum_{i=0}^{n} b_i (x-a)^i$, sendo que agora

$$b_i = \frac{p^{(i)}(a)}{i!}.$$

Exemplo: se $p(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1$, deduzimos que

$$p(0) = 1,\ p'(0) = 0,\ p^{(2)}(0) = 4,\ p^{(3)}(0) = 12,\ p^{(4)}(0) = 24.$$

As derivadas de ordem superior são obviamente nulas. Por outro lado, calculando as derivadas no ponto $x = 1$, e aplicando a fórmula anterior, vemos que se tem

$$p(x) = (x-1)^4 + 6(x-1)^3 + 14(x-1)^2 + 14(x-1) + 6$$

Esta última igualdade podia ser também obtida directamente, substituindo x por $y + 1$, desenvolvendo os binómios $(y + 1)^i$ e voltando a substituir y por $x - 1$.

Esta observação revela uma importante propriedade dos polinómios, a saber, o facto de que o seu comportamento global, isto é, os seus valores em qualquer ponto, é completamente determinado pelo seu comportamento local, ou seja, o seu valor e das suas derivadas num único ponto que, em geral, só dependem dos valores da função numa vizinhança arbitrariamente pequena desse ponto.

Para generalizar, na medida do possível, esta ideia consideramos primeiro $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas contínuas até à ordem $n+1$ (diz-se que φ é de classe C^{n+1}: $\varphi \in C^{n+1}([0,1])$). Pelo Teorema Fundamental da Análise,

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\,dt$$

Podemos integrar por partes e obter

$$\varphi(0) - ((1-t)\varphi'(t))|_0^1 + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt$$

Repetindo este procedimento, chegamos a

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt$$

Seja agora $f : I \to \mathbb{R}$, de classe C^{n+1} e $a, a+x \in I$. Se definirmos $\varphi(t) = f(a+tx)$, temos uma função nas condições do caso anterior. Aplicando a fórmula deduzida, juntamente com o Teorema de derivação da função composta, obtemos a seguinte igualdade

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+tx)\,dt$$

Esta igualdade é a **Fórmula de Taylor de f de ordem n, no ponto a, com resto integral**.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k$$

é o polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto a.

Vamos agora obter outra expressão para o resto; para isso começamos por estabelecer a seguinte generalização do Teorema do valor médio para integrais: seja f contínua em $[a,b]$ e g integrável e não-negativa no mesmo intervalo; então existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

O teorema do valor médio corresponde ao caso $g(t) = 1$ para todo o t, e a demonstração segue exactamente os mesmos passos: se f é contínua, existem constantes m, M tais que

$$m \leq f(t) \leq M$$

para todo o t; como $g(t) \geq 0$, tem-se

$$mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t)$$

e integrando em $[a,b]$

$$m\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq M\int_a^b g(t)\,dt$$

Se $\int_a^b g(t)\,dt = 0$, a igualdade que queremos provar é óbvia; caso contrário, temos

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leq M$$

e pelo Teorema do valor intermédio, f tem que tomar este valor em algum ponto c do intervalo.

Apliquemos agora este resultado ao resto integral da fórmula de Taylor: de acordo com as nossas hipóteses, $f^{(n+1)}(a+tx)$ é contínua em $[0,1]$ e $\frac{(1-t)^n}{n!}$ é integrável e nã-negativa. Logo existe $\theta \in [0,1]$, tal que

$x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+tx)\,dt = x^{n+1} f^{(n+1)}(a+\theta x) \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,dt =$

$= \frac{f^{(n+1)}(a+\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$

Esta é a **fórmula de Lagrange para o resto**.

Qualquer das duas expressões obtidas para o resto põe em evidência a principal propriedade do polinómio de Taylor: se $p(x)$ é o polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto a então

$$f(a+x) = p(x) + R_n(x)$$

em que o resto satisfaz

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$$

Nota: a fórmula de Taylor no ponto a pode também escrever-se

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

onde agora $\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$.