Capítulo 8

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

8.1 Introdução

Na definição de integral definida, consideramos a função integranda contínua num intervalo fechado e limitado. Agora, estenderemos esta definição para os seguintes casos:

Funções definidas em intervalos do tipo $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ ou $(-\infty, +\infty)$, ou seja para todo $x \geq a$ ou $x \leq b$ ou para todo $x \in \mathbb{R}$, respectivamente.

A função integranda é descontínua em um ponto c tal que $c \in [a, b]$.

As integrais destas funções são chamadas **integrais impróprias**. As integrais impróprias são de grande utilidade em diversos ramos da Matemática como por exemplo, na solução de equações diferenciais ordinárias via transformadas de Laplace e no estudo das probabilidades, em Estatística.

8.2 Integrais Definidas em Intervalos Ilimitados

Antes de enunciar as definições estudemos o seguinte problema: Calcular a área da região R determinada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x \geq 1$ e o eixo dos x.

Primeiramente note que a região R é **ilimitada** e não é claro o significado de "área"de uma tal região.

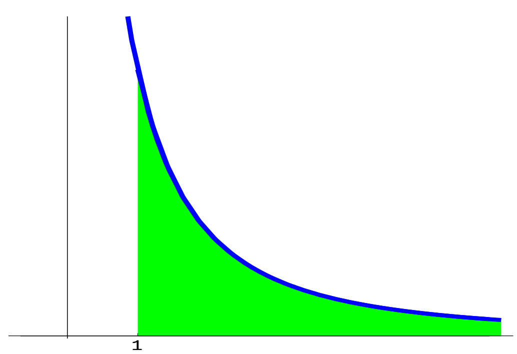


Figura 8.1: Gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$, $x \geq 1$.

Seja R_b a região determinada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$ e $1 \leq x \leq b$, acima do eixo dos x.

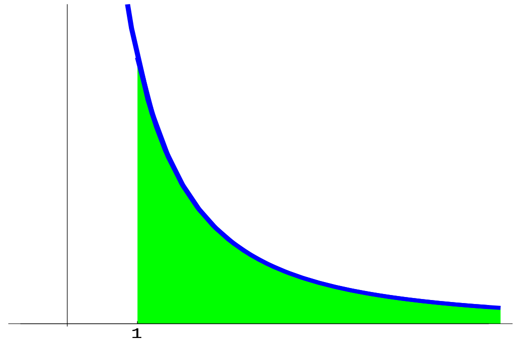


Figura 8.2: Gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$, $1 \le x \le b$.

A área de R_b é:

$$A(R_b) = \int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

É intuitivo que para valores de b muito grandes a região **limitada** R_b é uma boa aproximação da região **ilimitada** R. Isto nos induz a escrever:

$$A(R) = \lim_{b \to +\infty} A(R_b),$$

quando o limite existe. Neste caso:

$$A(R) = \lim_{b \to +\infty} A(R_b) = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} (1 - \frac{1}{b}) = 1\, u.a.$$

É comum denotar $A(R)$ por:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Esta integral é um exemplo de **integral imprópria** com limite de integração infinito. Motivados pelo raciocínio anterior temos as seguintes definições:

Definição 8.1.

1. *Se f é uma função integrável em $[a, +\infty)$, então:*

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx}$$

2. *Se f é uma função integrável em $(-\infty, b]$, então:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx}$$

3. *Se f é uma função integrável em $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, então:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\, dx + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\, dx}$$

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas convergentes; caso contrário são ditas divergentes.

Exemplo 8.1.

Calcule as seguintes integrais impróprias:

[1] $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctg(x)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} arctg(b) = \frac{\pi}{2}.$$

[2] $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-b}+1) = 1.$$

[3] $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^{-x}\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} (-e^{-x})\Big|_a^0 + 1 = +\infty.$$

[4] $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$. Seja $u = x^2+1$; logo $du = 2\,x\,dx$:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2\,u} = -\frac{1}{2\,(x^2+1)}.$$

Então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = 0.$$

[5] Calcule a área da região, no primeiro quadrante, determinada pelo gráfico de $y = 2^{-x}$, o eixo dos x e à direita do eixo dos y.

$$A(R) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2^x} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{2^x} = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{2^{-x}}{ln(2)}\right]\Bigg|_0^b = \frac{1}{ln(2)}\ u.a.$$

[6] Seja $p \in \mathbb{R}$. Calcule $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\,(b^{1-p}-1),\ \ p \neq 1$$

a) Se $p > 1$ temos: $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} b^{1-p} = 0$; logo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}.$$

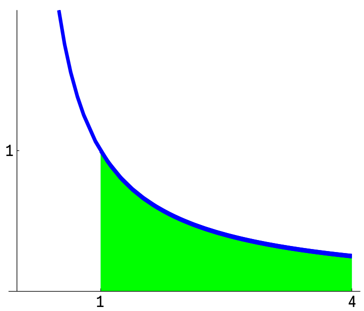
b) Se $p < 1$ temos: $\lim_{b \to +\infty} b^{1-p} = \infty$; logo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty.$$

c) Se $p = 1$, temos: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} ln(b) = \infty$. Em geral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad p \leq 1 \\ \frac{1}{p-1} & \text{se} \quad p > 1. \end{cases}$$

Portanto, a integral converge para $p > 1$ e diverge para $p \leq 1$.



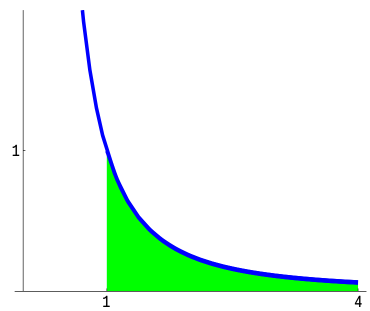


Figura 8.3: Gráficos de $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2}$, para $x > 0$, são,respectivamente.

[7] Calcule a área da região limitada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ e o eixo dos x.

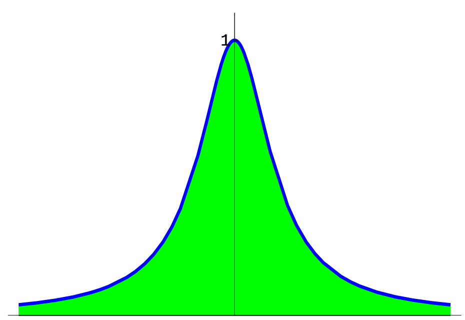


Figura 8.4: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

$$\begin{aligned} A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{b \to -\infty} \int_b^0 \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1}. \\ &= \lim_{b \to -\infty} (-arctg(b)) + \lim_{b \to +\infty} arctg(b) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \, u.a. \end{aligned}$$

Muitas vezes não é possível calcular o valor exato de uma integral imprópria, mas, podemos indagar se uma integral imprópria converge ou diverge.

Proposição 8.1. *Sejam f e g funções integráveis em $[a,+\infty)$ tais que $f(x) \geq g(x) > 0$ para todo $x \geq a$.*

1. *Se* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge, então* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *converge.*

2. *Se* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *diverge, então* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge.*

A prova, segue diretamente das definições. Seja $f(x) \geq 0$, para todo $x \geq a$. Para mostrar a convergência da integral de f, é preciso que f seja menor que uma função cuja integral converge. Para mostrar a divergência da integral de f, é preciso que f seja maior que uma função cuja integral diverge.

Exemplo 8.2.

[1] Analise a convergência da integral: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sen(x)+2}{\sqrt{x}}dx.$

Considere a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-1+2}{\sqrt{x}} \leq \frac{sen(x)+2}{\sqrt{x}}.$$

Por outro lado: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge; logo, pela proposição, parte 2, temos que a integral dada diverge.

[2] Analise a convergência da integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$

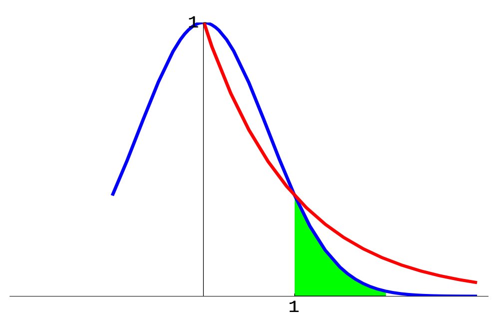


Figura 8.5: Gráfico de e^{-x^2} em azul e de e^{-x} em vermelho, respectivamente.

Claramente $\dfrac{1}{e^{x^2}} \leq \dfrac{1}{e^x}$, para todo $x \geq 1$; então, como

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}+e^{-1}) = \frac{1}{e},$$

temos que a integral dada converge.

8.2.1 Aplicação

Uma função positiva integrável em $\mathbb{R}$ é chamada densidade de probabilidade se:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1}$$

Assim denotamos e definimos a probabilidade de um número x estar comprendido entre a e b ($a < b$); por:

$$\boxed{P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Analogamente definimos as outras possibilidades. Também podemos definir o valor esperado do número x, como

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx.$$

Exemplo 8.3.

Seja $\alpha > 0$, a função

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\alpha x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

é de densidade de probabilidade. De fato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \alpha \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-\alpha x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} (1 - e^{-\alpha b}) = 1.$$

Por outro lado,

$$P(0 < x < 1) = \alpha \int_0^1 e^{-\alpha x}\,dx = 1 - e^{-\alpha}$$

e

$$E(x) = \alpha \int_0^{+\infty} x\, e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

8.3 Integrais de Funções Descontínuas

Problema: Calcular a área da região R determinada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \leq 9$ e o eixo dos x. Notamos que a região R é **ilimitada** pois a função f nem é definida no ponto $x = 0$. Seja R_ε a região determinada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e $\varepsilon \leq x \leq 9$, $\varepsilon > 0$ pequeno.

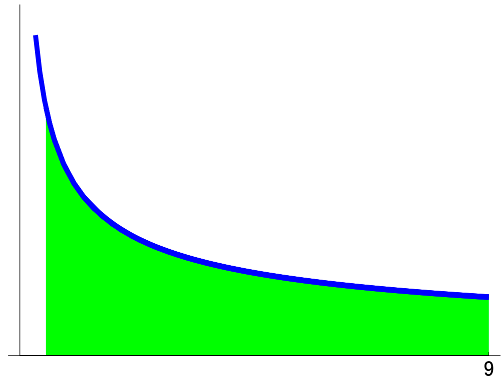


Figura 8.6: A região R_ε.

A área de R_ε é:

$$A(R_\varepsilon) = \int_\varepsilon^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^9 = \big(6 - 2\sqrt{\varepsilon}\big)\, u.a.$$

É intuitivo que para valores de ε muito pequenos a região **limitada** R_ε é uma boa aproximação da região **ilimitada** R. Isto nos induz a escrever:

$$A(R) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} A(R_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \big(6 - 2\sqrt{\varepsilon}\big) = 6\, u.a.$$

$\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ é um exemplo de integral **imprópria** com integrando ilimitado. Motivados pelo raciocínio anterior, temos as seguintes definições:

Definição 8.2.

1. *Se f é uma função integrável em $(a, b]$, então:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to a^+} \int_\varepsilon^b f(x)\, dx}$$

2. *Se f é uma função integrável em $[a, b)$, então:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to b^-} \int_a^\varepsilon f(x)\, dx}$$

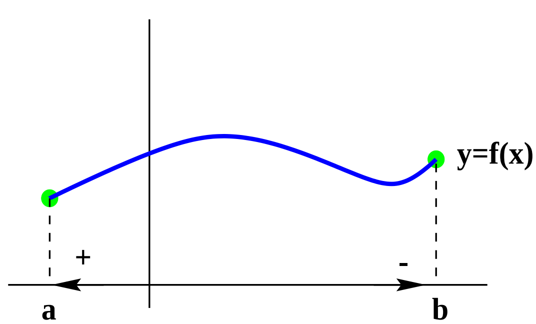


Figura 8.7:

3. *Se f é uma função integrável em $[a,b]$ exceto em c tal que $a < c < b$, então:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to c^-} \int_a^{\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to c^+} \int_{\varepsilon}^b f(x)\,dx}$$

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas convergentes; caso contrário, são ditas divergentes.

Exemplo 8.4.

Calcule as seguintes integrais impróprias:

[1] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(x)}}\,dx.$

Fazendo $u = sen(x)$ temos: $\displaystyle\int \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(x)}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{sen(x)}$. Logo,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(x)}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\sqrt{sen(x)}\Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2 - 2\sqrt{sen(\varepsilon)}) = 2.$$

[2] $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 2^-} \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 2^-} arcsen(\frac{x}{2})\Big|_0^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 2^-} (arcsen(\frac{\varepsilon}{2})) = \frac{\pi}{2}.$$

[3] $\displaystyle\int_{-4}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}.$

Observe que a função integranda não é definida em $-2 \in [-4,1]$.

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} &= \lim_{\varepsilon \to -2^-} \int_{-4}^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} + \lim_{\varepsilon \to -2^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} \\
&= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to -2^-} (x+2)^{\frac{2}{3}}\Big|_{-4}^{\varepsilon} + \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to -2^+} (x+2)^{\frac{2}{3}}\Big|_{\varepsilon}^{1} \\
&= \frac{3}{2}\big[\lim_{\varepsilon \to -2^-} (-\sqrt[3]{4} + \varepsilon^{\frac{2}{3}}) + \lim_{\varepsilon_2 \to -2^+} (\sqrt[3]{9} - \varepsilon^{\frac{2}{3}})\big] \\
&= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}).
\end{aligned}$$

[4] Calcule o comprimento da astróide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$.

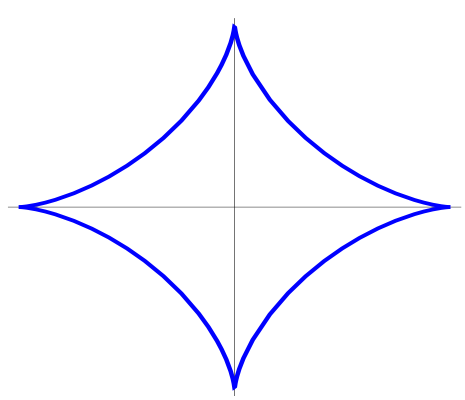


Figura 8.8: A astróide.

A curva não é diferenciável nos pontos de interseção com os eixos coordenados; pela simetria, calcularemos o comprimento da curva no primeiro quadrante e multiplicaremos o resultado por 4. Derivando implicitamente a equação da astróide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ em relação a x:

$$y' = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}; \quad \text{então,} \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Na última igualdade usamos o fato de que $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$; logo,

$$L = 4\sqrt[3]{a}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 4\sqrt[3]{a}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 4\sqrt[3]{a}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[\frac{3\,(a^{\frac{2}{3}} - \varepsilon^{\frac{2}{3}})}{2}\Big] = 6\,a\,u.c.$$

[5] Calcule a área limitada por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$, e pelas retas $x = 2$ e $x = 5$. $a > 0$.

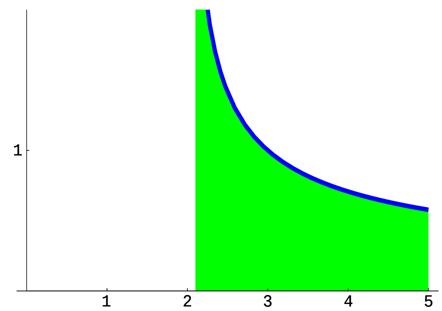


Figura 8.9: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

$$A = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{\varepsilon\to 2^+}\int_\varepsilon^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = 2\lim_{\varepsilon\to 2^+}\sqrt{x-2}\,\Big|_\varepsilon^5 = 2\sqrt{3}\,u.a.$$

Numa integral imprópria com limite superior infinito e cuja função integranda não é definida no limite inferior, procedemos assim: Se f é integrável em $(a, +\infty)$ então

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx}$$

onde $a < c$; analogamente nos outros casos.

Exemplo 8.5.

[1] $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} &= \lim_{\varepsilon\to 2^+}\int_\varepsilon^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} + \lim_{b\to+\infty}\int_3^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 2^+} arcsec(\frac{x}{2})\Big|_\varepsilon^3 + \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} arcsec(\frac{x}{2})\Big|_3^b \\
&= \frac{1}{2}\Big[\lim_{\varepsilon\to 2^+} arccos(\frac{2}{x})\Big|_\varepsilon^3 + \lim_{b\to+\infty} arccos(\frac{2}{x})\Big|_3^b\Big] \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

[2] Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ e o eixo dos x.

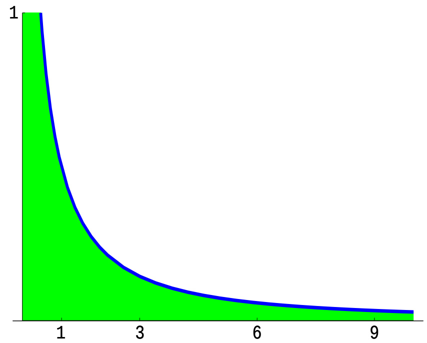


Figura 8.10: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$.

Como $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = 2\,arctg(\sqrt{x})$, então:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} + \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\,arctg(\sqrt{x})\Big|_\varepsilon^1 + \lim_{b\to+\infty} 2\,arctg(\sqrt{x})\Big|_1^b\\ &= 2\left[\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\pi - 4\,arctg(\sqrt{\varepsilon})}{4} + \lim_{b\to+\infty}\frac{4\,arctg(\sqrt{b}) - \pi}{4}\right]\\ &= \pi\,u.a.\end{aligned}$$

8.4 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais impróprias, caso sejam convergentes:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

(b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,e^{-x^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,ln(x)}$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{cosh(x)}{1+senh(x)}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,5^{-x^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,cosh(x)\,dx$

(j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{ln(x)}{x}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

(l) $\displaystyle\int_0^{+\infty} sen(t\,\pi)\,e^{-t}\,dt$

(m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(2\,x-3)^2}$

(n) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$

(o) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2\,x+5}$

(p) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$

(q) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\, sen(x)\, dx$

(r) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx$

(s) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}\, dx$

(t) $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln^3(x)}$

(u) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, sen(x)\, dx$

(v) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1}$

(w) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

(x) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\, ln^2(x)}$

2. Calcule a área das regiões determinadas por:

(a) $y = (e^x + e^{-x})^{-1}$ (b) $y = x^{-2}$, $y = e^{-2x}$ e $x \geq 1$

(c) $y = \frac{1}{x^4+1}$ e o eixo dos x.

3. Calcule as seguintes integrais impróprias, caso sejam convergentes:

(a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{cos(x^{\frac{1}{3}})}{x^{\frac{2}{3}}}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

(d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

(e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\, \sqrt[7]{(ln(x))^2}}$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$

(g) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1-cos(x)}$

(h) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2\,x-x^2}}$

(i) $\displaystyle\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[5]{(5-x)^2}}$

(j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2\, \sqrt{4-x^2}}$

(k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(l) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

(m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{cos(x)}$

(n) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4\,x-x^2-3}}$

(o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3\,x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

(p) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\,\sqrt{x^2-1}}$

(q) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\, ln^2(x)}$

(r) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\,\sqrt{ln(x)}}$

(s) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\, dx$

(t) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\, sen(\frac{1}{x})\, dx$

(u) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^3)}$

(v) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\, \sqrt[3]{ln(x)}}$

4. Determine o valor de s tal que as seguintes integrais impróprias sejam convergentes:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,sen(t)\,dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,e^{t}\,dt$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-st}\,dt$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,senh(t)\,dt$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,cosh(t)\,dt$

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos(x)}{x^s}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{(sen(x))^s}$

5. Seja $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$, $x>0$; esta função é chamada função gama. Verifique:

   (a) $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$, $x>0$.

   (b) Se $n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1)=n!$

6. Seja $f(x)=\begin{cases} a\,x^2 & \text{se} \quad |x|\le 3 \\ 0 & \text{se} \quad |x|>3 \end{cases}$. Determine a de modo que f seja função de densidade de probabilidade.

7. Determine k para que $f(t)=e^{k\,|t|}$ seja função de densidade de probabilidade.

8. Verifique que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,x^{2\,n+1}\,dx=\frac{n!}{2}$; $n\in\mathbb{N}$.

9. Se f é função de densidade de probabilidade, defina a probabilidade de um número x ser maior que a, ser menor que a.

10. Numa fábrica de circuitos impressos, a vida útil desses circuitos tem uma distribuição descrita pela densidade de probabilidade $f(x)=0.002\,e^{-0.002x}$ se $x\ge 0$, onde x é medido em horas.

    (a) Qual é a probabilidade dos circuitos funcionarem em menos de 600 horas?

    (b) Qual é a probabilidade dos circuitos continuarem funcionando após 600 horas?