2.a Lista de Exercícios de SMA304 - Álgebra Linear

Exercício 1. Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V. Caso não sejam especificadas, considere as operações em V como sendo as operações usuais.

(a) $V \doteq M_2$, $W \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} ; a, b, c, \in \mathbb{R} \right\}$.
(b) $V \doteq \mathbb{R}^4$, $W \doteq \{(x, x, y, y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$.
(c) $V \doteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R}), W \doteq \{p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) ; p(0) = p(1)\}$.
(d) $V \doteq M_n(\mathbb{R})$, seja $B \in M_n$ fixa, defina $W \doteq \{A \in M_n ; BA = 0\}$.
(e) $V \doteq \mathbb{R}^n$, $W \doteq \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) ; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$, onde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ são fixados.
(f) $V \doteq M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $W \doteq \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) ; AX = 0\}$, onde $A \in M_{m\times n}$ é fixada.
(g) $V \doteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) ; p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
(h) $V \doteq M_n(\mathbb{R})$, $W \doteq \{A \in M_n ; A^t = A\}$.
(i) $V \doteq M_n(\mathbb{R}), W \doteq \{A \in M_n ; A^t = -A\}$.
(j) $V \doteq C^\infty(\mathbb{R} ; \mathbb{R}), W \doteq \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R} ; \mathbb{R}) ; \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \right\}$.
(k) $V \doteq F(\mathbb{R} ; \mathbb{R}), W \doteq \{f \in F(\mathbb{R} ; \mathbb{R}) ; f(x_o) = 0\}, x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. Quais dos seguintes subconjuntos W de $\mathbb{R}^n$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$? Justifique sua resposta.

(a) $W \doteq \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 \in \mathbb{Z} \}$.
(b) $W \doteq \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 = 0 \}$.
(c) $W \doteq \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1$ é irracional $\}$.

Exercício 3. Quais dos seguintes subconjuntos abaixo são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$? Justifique sua resposta.

(a) Todas as funções $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tais que $f\left(x^2\right) = f(x)^2$, $x \in \mathbb{R}$.
(b) Todas as funções $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tais que $f(0) = f(1)$.
(c) Todas as funções $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tais que $f(-3) = 2 + f(1)$.
(d) $W = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \}$.
(e) $W = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; f(1) = 2f(5) \}$.

Exercício 4. Seja V o espaço vetorial de todas as matrizes quadradas de ordem $\underline{n}$, munido das com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de número real por matrizes. Qual dos seguintes subconjuntos de matrizes em V são subespaços vetoriais de V? Justifique sua resposta.

(a) Todas as matrizes de V que são inversíveis.
(b) Todas as matrizes de V que não inversíveis
(c) Todas as matrizes $A \in V$ tais que $AB = BA$, onde $B \in V$ é uma matriz fixada.
(d) Todas as matrizes de V que são diagonais.
(e) Todas as matrizes $A \in V$ tais que $\det(A) = 0$.

Exercício 5. Defina $V_p = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; f$ é uma função par $\}$ e $V_i = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; f$ é uma função ímpar $\}$.

(a) Mostre que V_p e V_i são subespaços vetorias de $\mathcal{F}(\mathbb{R} ; \mathbb{R})$.
(b) Mostre que $\mathcal{F}(\mathbb{R} ; \mathbb{R}) = V_p \oplus V_i$.

Exercício 6. Diga, em cada um dos itens abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta (isto é, provando se for verdadeira ou dando um contra-exemplo se for falsa).

(a) Se W_1 e W_2 são susbespaços vetoriais de um espaço vetorial V então $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V.
(b) Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V.
$W_1 \cup W_2$ é subespaço vetorial de V se, e somente se, $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$. (Sugestão: mostre que se W é subespaço de V e x_o, $y_o \in V$ são tais que $x_o \in W$ e $y_o \notin W$ então $x_o + y_o \notin W$ e use-o.)

Exercício 7. Em cada item abaixo encontrar os subespaços vetoriais $U+W$ e $U \cap W$, onde U, W são subespaços do espaço vetorial V indicado.

(a) $V = \mathbb{R}^2,\ U \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \ y=0\right\},\ W \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \ x = 2y\right\}.$

(b) $V = M_2(\mathbb{R}),\ U \doteq \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\ ;\ a,b \in \mathbb{R}\right\},\ W \doteq \left\{\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}\ ;\ c,d \in \mathbb{R}\right\}.$

(c) $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R}),\ U \doteq \{p \in V\,;\, p''(t) = 0\},\ W \doteq \{q \in V\,;\, q'(t) = 0, t \in \mathbb{R}\}.$

Exercício 8. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se $V = U \oplus W$.

(a) $V \doteq \mathbb{R}^2,\ U \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 2x+3y=0\right\},\ W \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x-y=0\right\}.$

(b) $V \doteq M_3(\mathbb{R}),\ U \doteq \left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}\ ;\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\},\ W \doteq \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ f & g & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}\ ;\ e,f,g,h,i \in \mathbb{R}\right\}.$

(c) $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R}),\ U \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p(1) = p(0) = 0\},\ W \doteq \{q \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, q'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}.$

Exercício 9. Em cada um dos itens abaixo, dado U subespaço vetorial do espaço vetorial V, encontrar o subespaço suplementar de U (isto é, o subespaço vetorial W do espaço vetorial V tal que $V = U \oplus W$).

(a) $V \doteq \mathbb{R}^3,\ U \doteq \{(x,y,0)\,;\, x,y \in \mathbb{R}\}.$

(b) $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R}),\ U \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}.$

(c) $V \doteq M_3,\ U \doteq \left\{A \in M_3(\mathbb{R})\,;\, A^t = A\right\}.$

(1) $V \doteq M_{2\times 1}(\mathbb{R}),\ U \doteq \{X \in M_{2\times 1}(\mathbb{R})\,;\, AX = 0\},$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercício 10. Os polinômios p_1 e p_2, dados por:

$$p_1(x) \doteq 5 + 9x + 5x^2, \quad p_2(x) \doteq 2 + 6x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

estão no subespaço gerado pelos polinômios q_1, q_2, q_3, onde

$$q_1(x) \doteq 2 + x + 4x^2, \quad q_2(x) \doteq 1 - x + 3x^2, \quad q_3(x) \doteq 3 + 2x + 5x^2, \quad x \in \mathbb{R}\ ?$$

Justifique sua resposta.

Exercício 11. Sejam $U \doteq \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x = z\,\}$, $V \doteq \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x = y = 0\,\}$ e $W \doteq \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+y+z = 0\,\}$.

(a) Mostre que U, V e W são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

(b) Mostre que $U + V = \mathbb{R}^3$, $U + W = \mathbb{R}^3$ e $W + V = \mathbb{R}^3$. Em algum caso a soma é direta? Justique sua resposta.

Exercício 12.

(a) Mostre que o subconjunto de $M_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes anti-simétricas é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Mostre que o subconjunto de $M_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes simétricas é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

(c) Mostre que $M_n(\mathbb{R})$ é soma direta dos subespaços das matrizes simétricas e anti-simétricas.