Primeira Lista de Exercícios de SMA304-Álgebra Linear

Professora: Maria do Carmo Carbinatto 04.08.2009

1. Seja $\theta \in [0, 2\pi]$ e considere a matriz $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen }\theta \\ \text{sen }\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

   (a) Calcular $A_\theta A_\delta$.

   (b) Calcular A_0 e $A_{-\theta}$.

   (c) Determine $\det(A_\theta)$. Se possível, calcule A_θ^{-1}.

2. Considere as matrizes: $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Existem números reais α, β e γ tais que $D = \alpha A + \beta B + \gamma C$? A solução encontrada é única?

   (b) Existem números reais α, β e γ tais que $0 = \alpha A + \beta B + \gamma C$? A solução encontrada é única?

   (c) Existem números reais α, β, γ e δ tais que $0 = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$? A solução encontrada é única?

3. Uma matriz quadrada A é chamada *simétrica* se $A^T = A$; *anti-simétrica* se $A^T = -A$.

   (a) Mostre que se A e B são simétricas, então $A + B$ e λA também o são.

   (b) Mostre que se A e B são anti-simétricas, então $A + B$ e λA também o são.

   (c) O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica? Justifique sua resposta.

4. Seja A uma matriz quadrada.

   (a) Mostre que a matriz $S = A + A^T$ é uma matriz simétrica.

   (b) Mostre que a matriz $R = A - A^T$ é uma matriz anti-simétrica.

   (c) Mostre que toda matriz pode ser decomposta na soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica.

   (d) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Encontre duas matrizes B e C tais que B é uma matriz simétrica e C é uma matriz anti-simétrica e $A = B + C$.

5. Considere $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Para quais $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ o sistema equações $AX = Y$ admite solução?

6. Considere $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Para quais $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$ o sistema equações $AX = Y$ admite solução?

7. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Mostre que o sistema linear $AX = B$, onde $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ não possui solução.

   (b) Sejam $\vec{u}_i$, $i = 1, 2, 3$, o vetor cujas coordenadas são a i-ésima coluna de A e seja $\vec{b} = (4, 5, 8)$ (compare com a matriz coluna B). Calcule $\vec{u}_i \cdot (1, 1, -1)$, $i = 1, 2, 3$ e $\vec{b} \cdot (1, 1, -1)$. Como estes produtos escalares mostram que o sistema linear $AX = B$ não possui solução?

8. É impossível para um sistema linear ter exatamente duas soluções distintas. Você concorda ou não com esta afirmação? Justifique sua resposta.

9. Seja A uma matriz $n \times n$ e suponha que A seja semelhante à uma matriz D, isto é, existe uma matriz inversível P tal que $A = PDP^{-1}$.
   (a) Mostre que $A^4 = PD^4P^{-1}$.
   (b) Seja $p_4(A) = I + A + A^2 + A^3 + A^4$. Mostre que $p_4(A) = Pp_4(D)P^{-1}$.

10. Para cada uma das afirmativas abaixo decida se é verdadeira ou falsa. Justique a sua escolha.
    (a) Se $A^2 = 0$, então $A = 0$.
    (b) Se $2A = 0$, então $A = 0$.
    (c) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
    (d) Se $A^2 = 0$, então A é uma matriz não inversível.
    (e) Se A e B são matrizes são inversíveis, então $A + B$ é uma matriz é inversível.
    (f) Se $AC = BC$, então $A = B$.
    (g) Se $AC = BC$ e C é inversível, então $A = B$.

11. Qual a matriz 2×2 rotaciona um vetor em V^2 de $\pi/2$ radianos? Justifique sua resposta.

12. Qual a matriz 2×2 rotaciona um vetor em V^2 de π radianos? Justifique sua resposta.

13. Mostre que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}||||\vec{v}||$ para todos $\vec{u}$ e $\vec{u}$ em V^3.

14. Sejam x_1, x_2 e x_3 três números reais não nulos. Mostre que
$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \geq 9.$$

15. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{u}$ dois vetores de V^3 tais que $||\vec{u}|| = 5$ e $||\vec{v}|| = 3$. Quais são o maior e o menor valores de $||\vec{u} - \vec{v}||$? Quais são o maior e o menor valores de $\vec{u} \cdot \vec{v}$?

16. Seja $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal de V^3 e seja $\vec{u}$ um vetor de V^3. Seja α a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{i}$; seja β a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{j}$ e seja γ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{k}$. Mostre que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

17. Suponha que um estudo demográfico mostre que a cada ano cerca de 5% da população do centro de uma cidade muda-se para a periferia (e 95% permanece no centro), enquanto que 3% da população da perifeira muda-se para o centro (e 95% permanece na periferia).

(a) Liste alguns fatos que devemos ignorar para que a seguinte equação matricial

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix} \mathbf{x}_0$$

descreva a mudança na população de um ano para outro. Interprete a equação acima. A matriz $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}$ é chamada *matriz de migração.*

(b) Se $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ s_0 \end{pmatrix}$, onde r_0 é o número de pessoas que vivem no centro e s_0 é o número de pessoas que vivem na periferia num determinado ano, o que representa a fórmula $\mathbf{x}_{k+1} = A^k \mathbf{x}_0$, onde k é um número natural?

8. A empresa K produz caminhões e aviões. Para produzir um caminhão, a empresa K necessita de uma tonelada de aço, 40 quilos de borracha e 2 meses de trabalho. Para produzir um avião, necessita de 50 toneladas de aço, 1000 quilos de borracha e 50 meses de trabalho. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 4 & 1000 \\ 2 & 50 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, onde x_1 é o número de caminhões produzidos e x_2 é o número de aviões produzidos. Interprete o produto AX. Se y_1 é o custo de cada tonelada de aço, y_2 é o custo de cada quilo de borracha e y_3 é o custo de cada mês de trabalho, qual é o custo de um caminhão e de um avião? Como representar o custo matricialmente por meio de um produto da forma BY onde $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$? Qual o significado de $A^T Y$?

18. Seja C_t o número de crianças na Índia no início do ano t e A_t o número de adultos na Índia no início do ano t. Durante um dado ano, 5% de todas as crianças se tornam adultos e 1% de todas as crianças morrem. Também, durante um dado ano, 3% de todos os adultos morrem. Escreva a matriz $\begin{pmatrix} C_{i+1} \\ A_{i+1} \end{pmatrix}$ em função da matriz $\begin{pmatrix} C_i \\ A_i \end{pmatrix}$.

19. Existe uma equação da forma $y = ax+b$ que melhor aproxima os dados $(2,1), (5,2), (7,3), (8,3)$?

20. Existe uma equação da forma $y = a + bx + cx^2$ que melhor aproxima os dados

$$(-2,3), (-1,5), (0,5), (1,4), (2,3)?$$

21. Uma corporação composta de cinco divisões (Pesquisa, Desenvolvimento, Produção, Contabilidade e Computação) é colocadas face ao problema de determinar os custos de operação líquidos de cada uma das divisões.

    Os custos que estão diretamente disponíveis são custos diretos. Os custos diretos totais da Divisão de Pesquisa são $R\$20000,00$, da Divisão de Desenvolvimento são de $R\$30000,00$, da Divisão de Produção são de $R\$60000,00$, da Divisão de Contabilidade são de $R\$5000,00$ e da Divisão de Computação são de $R\$3000,00$.

    A Divisão de Pesquisa lança 20% de sua despesa para a Divisão de Desenvolvimento, 10% para a Divisão de Produção e 10% para a Divisão de Computação. A Divisão de Desenvolvimento lança 20% de sua despesa para a Divisão de Pesquisa e 20% para a Divisão de Produção. A Divisão de Produção lança 20% de sua despesa para a Divisão de Desenvolvimento. A Divisão de Contabilidade lança 10% de sua despesa para a Divisão de Pesquisa, 20% para a Divisão de Desenvolvimento, 50% para a Divisão de Produção e 10% para a Divisão de Computação. Finalmente, a Divisão de Computação lança 30% de sua despesa para a Divisão de Pesquisa, 20% para a Divisão d Desenvolvimento, 20% para a Divisão de Produção e 30% para a Divisão de Contabilidade.

    Apresente um sistema linear que permita calcular o custo total de operação de cada divisão e outro que calcule custo líquido de cada divisão.